

Beiträge
zur Hierarchie der
bimodularen Singularitäten

Diplomarbeit
von

Dieter Balkenborg
Richard Bauer
Franz - Josef Bilitewski

Bonn 1984

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

6

KAPITEL I Ergebnisse aus der Theorie isolierter Hyperflächensingularitäten

1.	Grundlegende Begriffe und Eigenschaften	17
1.1	Jeträume, Rechts- und Kontaktäquivalenz	18
1.2	Isolierte Singularitäten	20
1.3	Korang, Multiplizität und Tangentialkegel	24
1.4	Quasihomogene und Γ -nichtentartete Funktionskeime	26
2.	Entfaltungen, Deformationen, transversale Scheiben, μ -Homotopie, μ -Vereinfachung und Modularität	32
2.1	Entfaltungen von Funktionskeimen	32
2.2	Deformationen komplexer Raumkeime	37
2.3	Transversale Scheiben	40
2.4	μ -Homotopie und μ -Vereinfachung	45
2.5	Modularität	51
3.	Arnolds Klassifikation der Singularitäten mit Modularität höchstens zwei	55
4.	Topologische Invarianten und deren Verhalten unter μ -Homotopie	66
4.1	Dynkindiagramme	66
4.2	Spektren und eine Vermutung von Arnold	84
4.3	Auflösung von Singularitäten und deren Invarianten unter μ -Homotopie	86
4.3.1	Ebene Kurvensingularitäten	86
4.3.2	Zweidimensionale Hyperflächensingularitäten	87
5.	Arnoldsche Klassen und μ -Homotopie	89
5.1	Nachtrag eines Beweises	89
5.2	Modularität und μ -Homotopie	91

KAPITEL II	<u>Die Problemstellung dieser Arbeit und der Aufbau der Beweise ihrer Hauptergebnisse</u>	
1.	Der Vereinfachungsbegriff, bekannte Vereinfachungsergebnisse und die Problemstellung dieser Arbeit	95
1.1	Der Vereinfachungsbegriff	95
1.2	Ergebnisse über Vereinfachungen zwischen uni- und bimodularen Singularitäten von Karras, Brieskorn und Laufer	97
1.3	Die Problemstellung dieser Arbeit	99
2.	Der Aufbau der Argumentation	101
2.1	Eine grobe Strukturierung des Vereinfachungsverhaltens	102
2.2	Argumentationen mit der Tjurinazahl	105
2.3	Die Untersuchung der topologischen Invarianten und der Spektren	108
2.4	Zur Analyse der Gleichungen	111
KAPITEL III	<u>Ergebnisse</u>	119
KAPITEL IV	<u>Methoden</u>	
1.	Primitive Einbettungen von Milnorgittern	128
1.1	Ganzzahlige Gitter und Diskriminantenformen	129
1.2	Die Invarianten (s_+, s_-, s_0, q) eines Milnorgitters	139
1.3	Existenz und Eindeutigkeit gerader, nicht ausgearteter Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, q)	148
1.4	Obergitter und primitive Einbettungen nicht ausgearteter gerader Gitter	152
1.5	Primitive Einbettungen ausgearteter gerader Gitter	161
1.6	Zur Anwendung	169
2.	Die Untersuchung der transversalen Scheibe	172
2.1	Konstruktion verseller Entfaltungen und transversaler Scheiben	172
2.2	\mathbb{C}^* - Aktion	174
2.3	Ein Resultat von Wirthmüller	182
2.4	Unabhängigkeit der Stratifikation von T von der gewählten minimalen transversalen Scheibe	187
2.5	Abschließende Bemerkungen	190

3.	Ebene Kurvensingularitäten und Reduktion von Flächen- auf Kurvensingularitäten	191
3.1	Isolierte ebene Kurvensingularitäten	191
3.1.1	Die Standardauflösung	191
3.1.2	Das System der Multiplizitätensequenzen	195
3.1.3	Der Multiplizitätenbaum	197
3.1.4	Ein Verfahren zur Herleitung algebraischer Bedingungen	200
3.2	Reduktion der Untersuchung von Flächensingularitäten auf Kurvensingularitäten	205

KAPITEL V Rechnungen

1.	Primitive Einbettungen in Milnorgitter der Gruppierungen E, Z, Q, W, S, U	216
1.1	Gruppierung E	217
1.2	Gruppierung Z	218
1.3	Gruppierung Q	220
1.4	Gruppierung W	223
1.5	Gruppierung S	227
1.6	Gruppierung U	235
2.	Analyse der Gleichungen	241
2.1	Untersuchung der Klassen $J_{3,0}, E_{18}, E_{19}, E_{20}$	241
2.2	Untersuchung der Klassen $Z_{1,0}, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}$	245
2.2.1	Allgemeiner Teil	245
2.2.2	Untersuchung $Z \rightarrow E$	249
2.2.2.1	Aufstellen der Gleichungen	249
2.2.2.2	Analyse der Gleichungen	254
2.3	Untersuchung der Klassen $Q_{2,0}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}$	260
2.3.1	Allgemeiner Teil	260
2.3.2	Untersuchung $Q \rightarrow E$	266
2.3.2.1	Aufstellen der Gleichungen	266
2.3.2.1	Analyse der Gleichungen	271
2.4	Untersuchung der Klassen $W_{1,0}, W_{17}, W_{18}$	275
2.4.1	Allgemeiner Teil	276
2.4.2	Untersuchung $W \rightarrow E$	279
2.4.2.1	Aufstellen der Gleichungen	279
2.4.2.2	Analyse der Gleichungen	283

2.5	Untersuchung der Klassen $S_{1,0}$, S_{16} , S_{17}	289
2.5.1	Allgemeiner Teil	289
2.5.2	Untersuchung $S \longrightarrow E$	296
2.5.2.1	Aufstellen der Gleichungen	296
2.5.2.2	Analyse der Gleichungen	300
2.5.3	Untersuchung $S \longrightarrow Z, W$	306
2.5.3.1	Aufstellen der Gleichungen	306
2.5.3.2	Analyse der Gleichungen	309
2.6	Untersuchung der Klassen $U_{1,0}$ und U_{16}	314
2.6.1	Vorbereitung der Analyse der Gleichungen	316
2.6.2	Untersuchung $U_{1,0} \longrightarrow T_{2\ 3\ 8} / T_{2\ 3\ 9}$	323
2.6.2.1	Aufstellen der Gleichungen	323
2.6.2.2	Analyse der Gleichungen	326
2.6.3	Untersuchung $U \longrightarrow Z, W$	330
2.6.3.1	Aufstellen der Gleichungen	330
2.6.3.2	Analyse der Gleichungen	336
2.6.4	Untersuchung nicht $(U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{3\ 3\ 8})$	351
2.6.5	Zusätzliche Gruppenaktionen auf Flächensingularitäten mit \mathbb{C}^* -Aktion	354

ANHANG A

A.1	Normalformen	360
A.2	Tabelle der Vereinfachungsergebnisse zu den Theoremen 1 und 2 aus Kapitel III	363
A.3	Vereinfachungsergebnisse von Laufer	364
A.4	Die Relationen $L(Y) \longrightarrow L(X)$, $\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X)$, $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$, $\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y)$	366
A.5	Liste stetiger Familien	372
A.6	Signaturen und Diskriminantenformen	385
A.7	Systeme der Multiplizitätensequenzen	389
A.8	Spektren	392

ANHANG B	<u>Computerprogramm</u>	396
----------	-------------------------	-----

LITERATURVERZEICHNIS		407
----------------------	--	-----

<u>Beiträge der Verfasser im einzelnen</u>		411
--	--	-----

EINLEITUNG

Eine Hierarchie innerhalb der isolierten Singularitäten von holomorphen Funktionskeimen wird durch die Vereinfachungsrelation definiert. Wir sagen, daß eine isolierte Singularität $f \in \mathcal{M}^2(n)$ sich in eine isolierte Singularität $g \in \mathcal{M}^2(n)$ vereinfacht (deformiert, $f \xrightarrow{\mu} g$), wenn durch eine kleine Störung von f Singularitäten erzeugt werden können, die zu g μ -homotop sind. (Die μ -Homotopie ist eine grobe Äquivalenzrelation im Vergleich zur Rechts- und Kontaktäquivalenz.)

Es ist keine allgemeine Methode bekannt, mit der über die Existenz einer Vereinfachung zwischen zwei beliebig vorgegebenen Singularitäten entschieden werden kann. Alle bisherigen Arbeiten über Vereinfachungen zwischen isolierten Hyperflächensingularitäten beziehen sich auf engumgrenzte Gruppen innerhalb der untersten Stufen der Hierarchie.

Ein gewisses Maß für den Rang einer Singularität in dieser Hierarchie ist ihre Modularität. Die Klassifikation von Arnold (vgl. [Ar 3]) erfaßt alle isolierten Singularitäten von Hyperflächen mit Modularität höchstens zwei. Die 0-, die 1- und die 2-modularen Klassen gliedert Arnold jeweils in unendliche Serien und in exzeptionelle Klassen. Dabei ergeben sich sowohl für die unimodularen als auch für die bimodularen Singularitäten jeweils vierzehn exzeptionelle Klassen, die in vielerlei Hinsicht verwandte Züge tragen.

E. Brieskorn hat die Vereinfachungen der Singularitäten aus den vierzehn von Arnold entdeckten exzeptionellen unimodularen Klassen innerhalb der unimodularen Singularitäten untersucht ([Br 2]). Er beschreibt, wie sich dieses Vereinfachungsverhalten in rein arithmetischen Eigenschaften ihrer Milnorgitter widerspiegelt ([Br 3]).

Ein Teil der Vereinfachungen der Singularitäten aus den exzeptionellen bimodularen Klassen ist durch die Arbeit [Lau 3] von H. Laufer bekannt. Wir werden das Vereinfachungsverhalten dieser Klassen in der vorliegenden Arbeit weiter untersuchen. Dabei werden wir uns an den Methoden der Arbeit [Br 2] von E. Brieskorn orientieren.

Ein Hauptergebnis unserer Arbeit ist die Bestimmung aller Vereinfachungen der Singularitäten aus den exzeptionellen bimodularen Klassen

$$\begin{array}{lll} E_{18}, E_{19}, E_{20} & W_{17}, W_{18} & U_{16} \\ Z_{17}, Z_{18}, Z_{19} & S_{16}, S_{17} & \\ Q_{16}, Q_{17}, Q_{18} & & \end{array}$$

in die uni- und bimodularen Singularitäten.

Wir zeigen, daß - analog zu dem Vereinfachungsverhalten der 0- und 1-modularen Singularitäten - diese Vereinfachungen nicht von den Repräsentanten der exzeptionellen Klassen abhängen, d.h. wenn eine Singularität aus der Klasse X sich in die Singularitäten einer Klasse Y vereinfacht (wir schreiben dann: $X \xrightarrow{\exists} Y$), so gilt dies für alle Singularitäten aus X (wir schreiben dann: $X \xrightarrow{\forall} Y$). Die gefundenen Vereinfachungen sind in einer Tabelle enthalten, die aufgrund des Umfangs dieser Arbeit sowohl im Anschluß an diese Einleitung als auch im tabellarischen Anhang A reproduziert ist.

Es ist nicht zu erwarten, daß das unterschiedliche Vereinfachungsverhalten der verschiedenen exzeptionellen bimodularen Klassen in einer zum unimodularen Fall vergleichbaren Weise in arithmetische Eigenschaften der Milnorgitter zum Ausdruck kommt. Denn nach W. Ebeling haben zum Beispiel E_{18} und Q_{18} isomorphe Milnorgitter.

Es gibt aber eine stärkere Invariante, nämlich die Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme zu einer isolierten Hyperflächensingularität, durch die sich die Klassen der 0-, 1- und 2-modularen Singularitäten unterscheiden lassen. Diese Diagramme beschreiben das Schnittverhalten einer durch eine geometrische Konstruktion ausgezeichneten Basis des Milnorgitters.

Bekannt ist: Vereinfacht sich eine Singularität f in eine Singularität g , so läßt sich jedes ausgezeichnete Dynkindiagramm zu g als Teilgraph in ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm zu f einbetten. Daher ist es natürlich zu fragen, wann ein solches Einbettungsverhalten vorliegt und ob dem eine Vereinfachung zwischen Singularitäten entspricht. Allerdings scheint die Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme zu einer Singularität unüberschaubar zu sein, und die Beantwortung dieser Frage ist schon von daher äußerst schwierig. Brieskorn hat aufgrund seiner Untersuchungen für die unimodularen Singularitäten die Vermutung geäußert, daß aus einer solchen Teilgraphbeziehung zwischen zwei Dynkindiagrammen stets eine Vereinfachung folgt ([Br 4]). Er konnte diese Vermutung in einer Reihe von Fällen beweisen.

Vergleicht man nun, ohne die Bewertung zu berücksichtigen, das Einbettungsverhalten sehr spezieller, von Gabrielov und Ebeling (vgl. I.4.1) bestimmter ausgezeichneter Dynkindiagramme mit den von uns betrachteten Vereinfachungen der bimodularen exceptionellen Klassen, so findet man zwar einige Vereinfachungen, denen kein Einbettungsverhalten entspricht; aber umgekehrt gibt es zu jeder Diagrammeinbettung eine Vereinfachung.

Bei der Betrachtung der Einbettungsrelation spezieller Diagramme für andere bimodulare Klassen stießen wir auf Beispiele der folgenden Art:

Es gibt ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm der unimodularen Klasse E_{14} , das sich - auch unter Berücksichtigung der Bewertung, wie uns Ebeling zeigte - zu einem ausgezeichneten Dynkindiagramm der bimodularen Klasse $W_{1,0}$ ergänzen läßt. Andererseits zeigt eine Betrachtung der Tjurinazahlen, daß $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{14}$ nicht möglich ist (II.2.2.2).

Diese Beobachtungen waren für uns Anlaß, das Vereinfachungsverhalten der niedrigsten Klassen der bimodularen Serien genauer zu untersuchen, zumal wir erwarteten, daß eine solche Untersuchung, verglichen mit der der bimodularen exzeptionellen Klassen, einfacher ausfallen würde. Diese Erwartung hat sich außer für die Klasse $U_{1,0}$ bestätigt.

Das zweite Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit, das ebenso in der Tabelle im Anschluß an diese Einleitung erfaßt ist, ist die Bestimmung aller Vereinfachungen der Singularitäten aus den Klassen der bimodularen Serien

$$J_{3,0}, Z_{1,0}, Q_{2,0}, W_{1,0}, S_{1,0} \text{ und } U_{1,0}$$

in die uni- und bimodularen Singularitäten. Es finden sich hier genau vier Vereinfachungen, für die gilt:

$$X \xrightarrow{\exists} Y, \text{ aber nicht: } X \xrightarrow{\forall} Y.$$

Es sind dies die Paare:

$$(X, Y) = (W_{1,0}, E_{14}), (S_{1,0}, E_{13}), (U_{1,0}, Z_{13}) \\ \text{und } (U_{1,0}, T_{2,3,9}).$$

Für die von uns betrachteten speziellen ausgezeichneten Dynkindiagramme gilt auch hier:

Für jede Diagrammeinbettung ohne Bewertung existiert eine Vereinfachung der zugehörigen Klassen.

Eine weitere interessante Invariante einer isolierten Hyperflächensingularität ist das Spektrum, ein Tupel rationaler Zahlen, das eng mit den Eigenwerten der Monodromie zusammenhängt und über eine gemischte Hodge-Struktur definiert wird.

Nach einer Vermutung von Arnold ([Ar 4]) folgt aus einer Vereinfachung zwischen zwei Singularitäten eine (leicht zu verifizierende) Adjazenzbeziehung zwischen den zugehörigen Spektren. Diese Adjazenzbeziehung haben wir in einer Reihe von Fällen bestimmt. In allen von uns untersuchten Vereinfachungen konnten wir die Vermutung von Arnold bestätigen, die in jüngster Zeit von J.H.M. Steenbrink bewiesen wurde.

Bei einem Vergleich der Spektrenadjazenzen mit dem Verhalten der speziellen Dynkindiagramme stießen wir auf das folgende Beispiel, von dem wir mit einem Hinweis von W. Ebeling beweisen konnten:

Es existiert ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm zu der unimodularen Klasse E_{14} , das mit Bewertung als Teilgraph in einem ausgezeichneten Dynkindiagramm der bimodularen Klasse $S_{1,1}^{\#}$ enthalten ist. Es existiert aber keine Vereinfachung zwischen diesen Klassen. Damit ist die von Brieskorn geäußerte Vermutung widerlegt (vgl. III).

Zu den Methoden:

a) Betrachtung der Invarianten

Fast alle Resultate der Form nicht($X \xrightarrow{\exists} Y$) erhalten wir durch die Untersuchung der Invarianten der Singularitäten. Durch eine Betrachtung einfacher Invarianten wie Korang und Milnorzahl lassen sich die möglichen Fälle von Vereinfachungen bereits wesentlich einschränken. Ein notwendiges Kriterium für eine Vereinfachung ist die primitive Einbettbarkeit der Milnorgitter. Ob zwei Milnorgitter primitiv ineinander einbetten, läßt sich mit Hilfe ihrer Diskriminantenformen entscheiden. Diese Methode werden wir in Anlehnung an die Arbeit [Ni] von V.V. Nikulin darstellen.

Zur Berechnung der Diskriminantenformen benutzen wir die Arbeit [Eb 2] von W. Ebeling. Ebeling gibt für die meisten von Arnold klassifizierten Singularitäten Dynkindiagramme sowie Signaturen und Zerlegungen der Milnorgitter an. Aus diesen Invarianten lassen sich die Diskriminantenformen leicht berechnen.

b) Analyse der Gleichungen

Die Fälle, in denen $X \xrightarrow{\exists} Y$ nicht durch eine Betrachtung von Invarianten ausgeschlossen werden kann, sowie Resultate der Form $X \xrightarrow{\exists} Y$, $X \xrightarrow{\forall} Y$ und Resultate der Form $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ werden bewiesen, indem wir für geeignete $f \in X$, $g \in Y$ $f \xrightarrow{\mu} g$ bzw. $f \not\xrightarrow{\mu} g$ durch eine Analyse der Gleichungen beweisen. Hierzu genügt es, eine transversale Scheibe

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathfrak{m}^2(n) \text{ mit} \\ \bar{T}(t) &= f + \sum_{i=1}^r t_i \psi_i, \quad \psi_1, \dots, \psi_r \text{ erzeugen } \mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m} \Delta f, \end{aligned}$$

an den Rechtsorbit von f zu untersuchen.

Die Untersuchung, für welche Parameter t die Singularitäten $\bar{T}(t)$ μ -homotop zu g sind, führt auf algebraische Bedingungen an die Parameter $t \in \mathbb{C}^r$. Ist g stabil-äquivalent zu einer Kurvensingularität, so leiten wir die Bedingungen mit Hilfe des Systems der Multiplizitätensequenzen dieser Kurvensingularität her. In den anderen von uns betrachteten Fällen ist g stabil-äquivalent zu einer Flächensingularität mit der Multiplizität drei. Wir können uns dann mit einer Methode von C.T.C Wall auf die Untersuchung von Kurvensingularitäten reduzieren.

Die Berechnungen expliziter Lösungen der algebraischen Bedingungen führt auf stetige Familien f_t mit $f_0 = f$ und $f_t \sim_{\mu} g$ für $t \neq 0$.

Viele Vereinfachungen $f \xrightarrow{\mu} g$ folgen bereits aus der Angabe solcher stetigen Familien.

Für quasihomogenes f läßt sich die Untersuchung wesentlich vereinfachen, wenn man transversale Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion benutzt.

Zur Gliederung:

In Kapitel I haben wir die für unsere Untersuchung grundlegenden Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie isolierter Hyperflächensingularitäten zusammengetragen. Diese sind weitgehend bekannt, wenn sie auch in der Literatur nur verstreut zu finden und in den verschiedenen Arbeiten nicht einheitlich dargestellt sind. Kapitel I ist daher recht ausführlich.

Die Kapitel II und III sind zentral. Hier findet der Leser die Präzisierung der Aufgabenstellung, die Hauptresultate der Arbeit, sowie bekannte Vereinfachungsergebnisse, soweit sie mit unserer Untersuchung in Zusammenhang stehen. Ferner werden der Aufbau der Beweise zu den Hauptresultaten erläutert und allgemeine, kurze Teile der Beweise ausgeführt.

Die Methoden für die Untersuchung der primitiven Einbettungen von Milnorgittern, die Untersuchung der transversalen Scheiben und die Methoden zur Aufstellung der algebraischen Bedingungen werden in Kapitel IV dargestellt.

Kapitel V zerfällt in zwei unabhängige Teile. In V.1 untersuchen wir die primitiven Einbettungen von Milnorgittern, um Vereinfachungen zwischen Singularitäten auszuschließen. In V.2 beweisen wir durch eine Analyse der Gleichungen die Aussagen $f \xrightarrow{\mu} g$, die nicht durch eine Betrachtung der Invarianten nachgewiesen werden können, sowie die Aussagen $f \xrightarrow{\mu} g$, die nicht aus den von uns angegebenen stetigen Familien folgen.

Wie aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlich ist, verläuft jede der Untersuchungen in V.2 in drei Stufen: Zunächst werden transversale Scheiben berechnet, sowie die Reduktion auf Kurvensingularitäten ausgeführt (Allgemeiner Teil bzw. Vorbereitung der Analyse der Gleichungen).

Im nächsten Schritt werden für mehrere Singularitätenklassen simultan die algebraischen Bedingungen hergeleitet (Aufstellen der Gleichungen). Schließlich untersuchen wir im letzten Schritt das Lösungsverhalten der so gefundenen Gleichungssysteme (Analyse der Gleichungen).

Die Tabellen zu den Ergebnissen aus Kapitel III und die Tabellen mit Normalformen und Invarianten der Klassen von Arnold sind im Anhang A zusammengefaßt.

Das in Anhang B angegebene Computerprogramm wurde für die Herleitung der algebraischen Bedingungen in Kapitel V.2 verwendet.

Wir weisen noch auf einige besondere inhaltliche Punkte der Arbeit hin.

- Auf die Klassifikation von Arnold gehen wir in I.3 ein.
- Die Singularitäten einer Arnoldschen Klasse sind μ -homotop. In I.2.4 gehen wir auf μ -Homotopie sowie μ -Vereinfachung und deren Eigenschaften ein. In I.5 zeigen wir, daß verschiedene Arnoldsche Klassen in verschiedenen μ -Homotopieklassen liegen. Wir erörtern die Frage, ob die Modularität längs μ -Homotopieklassen konstant ist.
- In II.4.1 geben wir einen ausführlichen Beweis für die Invarianz der Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme unter μ -Homotopie.
- In IV.1.5 behandeln wir die primitive Einbettbarkeit von geraden Gittern mit eindimensionalem Kern in ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter.
- Auf monomialen transversalen Scheiben quasihomogener Singularitäten ist eine C^* -Aktion definiert. Wir leiten hieraus in IV.2.2 einige Folgerungen her, die die Analyse der Gleichungen in V.2 wesentlich erleichtern. Wir übertragen ferner zwei Ergebnisse für semiuniverselle Deformationen mit C^* -Aktion auf transversale

Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion, die einer zusätzlichen Eigenschaft genügen.

- In V.2.6 gehen wir kurz auf eine zusätzliche Gruppenoperation für die quasihomogene Singularität aus U_{16} ein. Ferner geben wir für zwei durch ihr Vereinfachungsverhalten ausgezeichnete Singularitäten aus $U_{1,0}$ andere Gleichungen an, die eine zusätzliche Symmetrie besitzen.
- Zwischen bestimmten Klassen von Flächensingularitäten und bestimmten Klassen von Kurvensingularitäten wird durch die Reduktionsmethode von C.T.C Wall eine Bijektion definiert. Wir zeigen in Anlehnung an Methoden seiner Arbeit [Wa], daß diese Bijektion die Vereinfachungsrelation respektiert (IV.3.2).

Die Untersuchung der Vereinfachungen in dieser Diplomarbeit ist wie folgt aufgeteilt:

Richard hat die Vereinfachungen der Klassen

$$\begin{aligned} & J_{3,0}, E_{18}, E_{19}, E_{20} \\ & Z_{1,0}, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19} \\ & Q_{2,0}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18} \end{aligned}$$

Dieter die Vereinfachungen der Klassen

$$\begin{aligned} & W_{1,0}, W_{17}, W_{18} \\ & S_{1,0}, S_{16}, S_{17} \text{ und} \end{aligned}$$

Franz die Vereinfachungen der Klassen

$$U_{1,0}, U_{16}$$

untersucht.

Ursprünglich waren dies drei Einzelthemen. Die Themenstellung legte es jedoch nahe, diese Arbeit gemeinsam zu verfassen.

Dazu waren aufgrund der unterschiedlichen Ansätze intensive Diskussionen und Umarbeitungen der Entwürfe erforderlich.

Sowohl im Aufbau als auch bei den Methoden haben wir uns um eine kohärente Form der Darstellung bemüht. Dies gilt insbesondere für Kapitel V.

Wir möchten J. Wahl, K. Wirthmüller, C.G. Gibson, U. Karras und vielen anderen für ihre Gesprächsbereitschaft danken, ebenso dem RHRZ für die Benutzung der Rechenanlage. Franz dankt der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle Förderung.

Unser besonderer Dank gilt Dr. W. Ebeling für die gute Betreuung, Prof. E. Brieskorn für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wichtige Impulse und unseren Eltern für die Unterstützung.

Bonn, den 1. Mai 1984

Die drei B's

Theoremen 1 und 2 aus Kapitel III

$X \xrightarrow{Y} TP, O, R$

X	(P, O, R) ≤
U ₁₆	(5,5,5); (4,4,7); (2,4,9)
U _{1,0}	(4,4,5); (3,4,6); (2,4,7); (2,3,8)
S ₁₇	(3,6,6); (3,5,8); (3,4,9); (2,5,9); (2,3,10)
S ₁₆	(3,5,7); (3,4,8); (2,4,9); (2,5,8)
S _{1,0}	(3,5,5); (3,4,6); (3,3,7); (2,3,8)
M ₁₈	(2,7,7); (2,6,9); (2,5,10); (2,3,12)
M ₁₇	(2,6,8); (2,5,9); (2,3,11)
M _{1,0}	(2,6,6); (2,5,7); (2,4,8); (2,3,9)
Q ₁₈	(3,3,11)
Q ₁₇	(3,3,10); (2,3,11)
Q ₁₆	(3,3,9)
Q _{2,0}	(3,3,7)
Z ₁₉	(2,4,12); (2,3,13)
Z ₁₈	(2,4,11); (2,3,12)
Z ₁₇	(2,4,10); (2,3,11)
Z _{1,0}	(2,4,8)
E ₂₀	(2,3,14)
E ₁₉	(2,3,13)
E ₁₈	(2,3,12)
J _{3,0}	(2,3,10)

$\exists U_{1,0} \xrightarrow{Y} T_{2,3,9}$, ABER NICHT: $U_{1,0} \xrightarrow{Y} T_{2,3,9}$

X	J _{3,0}	E ₁₈	E ₁₉	E ₂₀	Z _{1,0}	Z ₁₇	Z ₁₈	Z ₁₉	Q _{2,0}	Q ₁₆	Q ₁₇	Q ₁₈	M _{1,0}	M ₁₇	M ₁₈	S _{1,0}	S ₁₆	S ₁₇	U _{1,0}	U ₁₆	
U _{1,1}																				X	X
U _{1,0}																				X	X
U _{1,2}																					X
S _{1,1}																					
S _{1,2}																					
S _{1,0}																					
S _{1,1}																					
S _{1,2}																					
S _{1,0}																					
M _{1,1}																					
M _{1,2}																					
M _{1,0}																					
M _{1,1}																					
M _{1,2}																					
M _{1,0}																					
M _{1,1}																					
M _{1,2}																					
Q _{1,1}																					
Q _{1,0}																					
Q _{2,1}																					
Q _{2,0}																					
Q _{1,2}																					
Q _{1,1}																					
Q _{1,0}																					
Z _{1,8}																					
Z _{1,7}																					
Z _{1,3}																					
Z _{1,2}																					
Z _{1,1}																					
Z _{1,0}																					
Z _{1,3}																					
Z _{1,2}																					
Z _{1,1}																					
Z _{1,0}																					
E _{1,9}																					
E _{1,8}																					
J _{3,3}																					
J _{3,2}																					
J _{3,1}																					
J _{3,0}																					
E _{1,1}																					
E _{1,3}																					
E _{1,2}																					

X: $X \xrightarrow{Y} Y$
 ☆: $X \xrightarrow{\exists} Y$, ABER NICHT: $X \xrightarrow{Y} Y$

KAPITEL I: ERGEBNISSE AUS DER THEORIE ISOLIERTER HYPER-
FLÄCHENSINGULARITÄTEN

I.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

Unsere Untersuchungen über Vereinfachungen beziehen sich stets auf holomorphe Funktionskeime $f: (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$. Obwohl sich viele der folgenden Aussagen auf glatte Funktionskeime $f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ übertragen lassen, beschränken wir uns daher von vorneherein auf den komplexen Fall.

Wir setzen einige Tatsachen aus der lokalen analytischen Geometrie, wie sie z.B. in [Fo], § 1-11, und [Br 5], 8.1 und 8.2, dargestellt sind, als vertraut voraus.

Es bezeichne

- $\mathcal{O}(n)$ den Ring der holomorphen Funktionskeime in $0 \in \mathbb{C}^n$,
- $\mathfrak{m}(n)$ dessen maximales Ideal,
- $\mathcal{O}^*(n)$ die Gruppe der Einheiten in $\mathcal{O}(n)$,
- $\beta(n)$ die Gruppe der biholomorphen Abbildungskeime $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$,
- (X, x) den Keim einer analytischen Menge in $x \in \mathbb{C}^n$ bzw., wenn dies ausdrücklich gesagt wird, einen komplexen Raumkeim mit eventuell nicht reduzierter Struktur.

Für $f \in \mathfrak{m}(n)$ bezeichne

$$\Delta f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}(n)$$

das von den partiellen Ableitungen von f erzeugte Jacobi-ideal.

I.1.1 Jeträume, Rechts- und Kontaktäquivalenz

(Literatur: [B-L], § 4 und § 11, [Was], § 1 und § 2)

1.1.1 Für k, r und n aus \mathbb{N}_0 mit $n \geq 1$, $0 \leq r \leq k+1$, sei

$$J_k^r(n) := \mathfrak{m}^r(n) / \mathfrak{m}^{k+1}(n) \quad (\mathfrak{m}^0(n) := \mathcal{O}(n)).$$

Die Elemente aus dem Jetraum $J_k^0(n)$ heißen k-Jets von Funktionskeimen.

Die Jetabbildung

$$j_k : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n) / \mathfrak{m}^{k+1}(n)$$

$$f \longmapsto f + \mathfrak{m}^{k+1}(n)$$

induziert auf $J_k^0(n)$ die Struktur einer lokalen \mathbb{C} -Algebra mit maximalem Ideal $J_k^1(n)$ und der Gruppe der Einheiten $J_k^*(n)$. Da zwei Funktionskeime $f, g \in \mathfrak{m}(n)$ genau dann den gleichen k-Jet repräsentieren, wenn ihre Taylorreihen bis zum Grad k übereinstimmen, ist $J_k^0(n)$ als Vektorraum isomorph zum Raum der Polynome vom Grad höchstens k . $J_k^0(n)$ ist als endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen.

$\mathcal{O}(n)$ trage im folgenden die durch die Abbildungen $j_k : \mathcal{O}(n) \longrightarrow J_k^0(n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, definierte Initialtopologie: Dies ist die größte Topologie auf $\mathcal{O}(n)$, so daß eine Abbildung $p : X \longrightarrow \mathcal{O}(n)$ von einem topologischen Raum X nach $\mathcal{O}(n)$ genau dann stetig ist, wenn alle Kompositionen $j_k \circ p$ stetig sind.

Für einen biholomorphen Abbildungskeim $\phi \in \mathcal{B}(n)$ erhalten wir den k-Jet $j_k(\phi) \in J_k^0(n) \times \dots \times J_k^0(n)$, indem wir den k-Jet jeder Komponentenfunktion bilden. Die Abbildung $j_k : \mathcal{B}(n) \longrightarrow j_k(\mathcal{B}(n))$ induziert auf $j_k(\mathcal{B}(n))$ eine Gruppenstruktur.

1.1.2 Um Funktionskeime zu identifizieren, die sich nur um einen biholomorphen Koordinatenwechsel unterscheiden, betrachten wir die Gruppenoperation

$$\mathcal{B}(n) \times \mathfrak{m}(n) \longrightarrow \mathfrak{m}(n)$$

$$(\phi, f) \longmapsto f \circ \phi^{-1}.$$

Die Bahnen dieser Operation heißen Rechtsorbits, f und $g \in \mathfrak{m}(n)$ heißen rechtsäquivalent ($f \sim_R g$), wenn sie im gleichen Rechtsorbit liegen.

Wir definieren eine weitere Gruppenoperation auf $\mathfrak{m}(n)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}^*(n) \times \mathcal{B}(n)) \times \mathfrak{m}(n) &\longrightarrow \mathfrak{m}(n) \\ ((e, \phi), f) &\longmapsto e \cdot (f \circ \phi^{-1}). \end{aligned}$$

Deren Bahnen heißen Kontaktorbits und $f, g \in \mathfrak{m}(n)$ kontaktaquivalent ($f \sim_K g$), wenn sie im gleichen Kontaktorbit liegen.

$f, g \in \mathfrak{m}(n)$ sind kontaktäquivalent genau dann, wenn die Raumkeime $(f^{-1}(0), 0)$ und $(g^{-1}(0), 0)$ isomorph sind.

Auf $J_k^1(n)$, $k \in \mathbb{N}$, werden die Operationen

$$\begin{aligned} j_k(\mathcal{B}(n)) \times J_k^1(n) &\longrightarrow J_k^1(n) \\ (j_k(\phi), j_k(f)) &\longmapsto j_k(f \circ \phi) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (J_k^*(n) \times j_k(\mathcal{B}(n))) \times J_k^1(n) &\longrightarrow J_k^1(n) \\ (j_k(e), j_k(\phi), j_k(f)) &\longmapsto j_k(e \cdot (f \circ \phi^{-1})) \end{aligned}$$

induziert, deren Bahnen wir Rechts- bzw. Kontaktorbits im Jetraum nennen.

Dies sind nun algebraisch definierte Operationen von wegzusammenhängenden algebraischen Gruppen auf dem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum $J_k^1(n)$. Deren Orbits sind folglich wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeiten von $J_k^1(n)$ ([Hu], 8.3.). Ein Rechts- bzw. Kontaktorbit wird unter der Jetabbildung $j_k: \mathfrak{m}(n) \longrightarrow J_k^1(n)$ stets surjektiv auf ein Rechts- bzw. Kontaktorbit im Jetraum abgebildet.

Satz:

Seien $f \in \mathfrak{m}(n)$ und $k \in \mathbb{N}$.

- a) Der Tangentialraum des Rechtsorbits im Jetraum von $j_k(f)$ in diesem Punkt ist $j_k(\mathfrak{m}\Delta f)$.
- b) Der Tangentialraum des Kontaktorbits im Jetraum von $j_k(f)$ in diesem Punkt ist $j_k((f) + \mathfrak{m}\Delta f)$.

(Dabei betrachten wir die Tangentialräume als Untervektorräume von $J_k^1(n)$.)

Beweis: Vergleiche [Was], Lemma 2.8.

1.2 Isolierte Singularitäten

(Literatur: wie 1.1)

1.2.1 Wir werden häufig die folgende einfache Folgerung aus dem Nakayama-Lemma der kommutativen Algebra benutzen:

Lemma:

Seien $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}(n)$ ein Ideal und $k \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl mit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{k+1} \leq k.$$

Dann gilt $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{a}$ und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{C}} J_k^0(n) / j_k(\mathfrak{a}).$$

Beweis: [Was], Cor. 1.14. □

Korollar:

Ist $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}(n)$ ein Ideal mit $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \mathfrak{a} \leq k$, so gilt $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{a}$.

1.2.2 Sei $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung der Null, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(0) = 0$.

Definition:

Die kritischen Punkte von f sind die Punkte aus

$$C := \left\{ x \in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \right\}.$$

$x \in U$ heißt regulärer Punkt von f , wenn $x \notin C$,

$x \in U$ heißt singulärer Punkt der Faser $f^{-1}(t)$, wenn $x \in C \cap f^{-1}(t)$.

$t \in \mathbb{C}$ heißt kritischer Wert von f , wenn $t \in f(C)$.

Bemerkung: Da im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir den durch die holomorphe Funktion f definierten Funktionskeim in $\mathfrak{m}(n)$ ebenfalls mit f bezeichnen. Es gilt: O ist singulärer Punkt von $f^{-1}(O) \iff f \in \mathfrak{m}^2(n)$.

Satz:

Sei O ein singulärer Punkt von $f^{-1}(O)$. Dann sind äquivalent:

- (i) O ist isolierter kritischer Punkt von f .
- (ii) Die Milnorzahl $\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \Delta f$ ist endlich.
- (iii) O ist ein isolierter singulärer Punkt von $f^{-1}(O)$.
- (iv) Die Tjurinazahl $\tau(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / (f) + \Delta f$ ist endlich.

Beweis:

"(i) \iff (ii)" und "(iii) \iff (iv)" folgen aus dem Rückert-schen Nullstellensatz und dem Korollar aus 1.2.1 (vergleiche [B-L] 11.16). "(i) \implies (iii)" ist trivial.

"(iii) \implies (i)": Nach einem Satz von Sard (siehe [B-L] Kapitel 2) hat $f(C) \subset \mathbb{C}$ das Maß Null. Nach Voraussetzung ist $f_1 : C \longrightarrow \mathbb{C}$ endlich in O , also endlich in einer Umgebung von O . Für hinreichen kleine Umgebungen $O \in U' \subset U$ und $O \in V \subset \mathbb{C}$ ist demnach $f(C \cap U') \cap V$ analytisch und nulldimensional. Also hat auch $C \cap U$ in O die Dimension 0, d.h. O ist ein isolierter Punkt von C (siehe [Fi] 3.2.). □

Definition:

Erfüllt der Funktionskeim $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ eine der in obigen Satz genannten Bedingungen, so sagen wir:

" f hat in O eine isolierte Singularität"
oder kurz

" f ist eine isolierte Singularität".

Bemerkung: (i) Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ wie oben. Dann ist O ein regulärer Punkt von f genau dann, wenn $\Delta f = \mathcal{O}(n)$, also $\mu(f) = \tau(f) = 0$.

(ii) Die Milnor- und die Tjurinazahlen definieren Funktionen $\mu, \tau : \mathfrak{m}(n) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Diese Funktionen sind halbstetig nach oben (siehe 2.4.1).

1.2.3 Lemma:

Sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ eine isolierte Singularität. Dann gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}_{\Delta f} = \mu(f) - 1 + n, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m}_{\Delta f} = \mu(f) - 1,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}_{\Delta f + (f)} = \tau(f) - 1 + n, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m}_{\Delta f + (f)} = \tau(f) - 1.$$

Beweis:

Wir modifizieren den Beweis aus [Was] Prop. 2.19. Es genügt zu zeigen:

$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq n}$ sind linear unabhängig modulo $\mathfrak{m}_{\Delta f + (f)}$,

denn dann ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \Delta f + (f) / \mathfrak{m}_{\Delta f + (f)} = \dim_{\mathbb{C}} \Delta f / \mathfrak{m}_{\Delta f} = n.$$

Die Behauptungen folgen dann aus den Definitionen von $\mu(f)$, $\tau(f)$ und aus $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^{(n)} / \mathfrak{m}^2(n) = n$.

Annahme: Es sei

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + u \cdot f$$

mit $c_i \in \mathbb{C}$, $u_i \in \mathfrak{m}(n)$, $u \in \mathcal{O}(n)$ und $c_1 \neq 0$.

Wir definieren den Keim eines Vektorfeldes auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ durch

$$X := \sum_{i=1}^n (c_i - u_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

und zeigen für $k \geq 1$:

$$(**) \quad x_1^k \in \Delta f + (f) \implies X(x_1^k) \in \Delta f + (f).$$

Da $X(x_1^k) = k \cdot (c_1 - u_1) x_1^{k-1}$ und $k \cdot (c_1 - u_1) \in \mathcal{O}^*(n)$

gilt dann:

$$x_1^k \in \Delta f + (f) \implies x_1^{k-1} \in \Delta f + (f).$$

Da $1 \notin \Delta f + (f) \subset \mathfrak{m}(n)$ folgt $x_1^k \notin \Delta f + (f)$ für alle $k \geq 1$ im Widerspruch zur Isoliertheit der Singularität, denn aus dem Korollar in 1.2.1 folgt $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subset \Delta f$.

Beweis von (**):

Sei $x_1^k \in \Delta f + (f)$. Dann existieren $\eta_j, \eta \in \mathcal{O}(n)$ mit

$$x_1^k = \eta f + \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

$$X(x_1^k) = X(\eta)f + \eta X(f) + \sum_{j=1}^n X(\eta_j) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \eta_j X\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Es gilt $X\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \in \Delta f + (f)$, da

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) &= \sum_{i=1}^n (c_i - u_i) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} X(f) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(c_i - u_i)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ (*) \quad &= \frac{\partial}{\partial x_j} (uf) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(c_i - u_i)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \Delta f + (f). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar:

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^k(n) \subset \Delta f$. Dann ist die Kodimension des Rechts- (bzw. Kontakt-) Orbits von $j_k(f)$ in $J_k^2(n)$ gleich $\mu(f) - 1$ (bzw. $\tau(f) - 1$).

Beweis:

Der Tangentialraum des Rechtsorbits von $j_k(f)$ in $J_k^2(n)$ ist nach 1.1.2 $j_k(\mathfrak{m}\Delta f)$. Da $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta f$ gilt für dessen Kodimension in $J_k^2(n)$:

$$\text{codim}_{\mathbb{C}} j_k(\mathfrak{m}\Delta f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^2(n) / \mathfrak{m}\Delta f + \mathfrak{m}^{k+1} = \mu(f) - 1.$$

Analog folgt die Behauptung für den Kontaktorbit. □

1.2.4 Satz:

Seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}^2(n)$ kontaktäquivalent.

Dann gilt: $\mu(f_1) = \mu(f_2)$
und $\tau(f_1) = \tau(f_2)$.

Beweis:

Hat f_1 keine isolierte Singularität in 0, so auch nicht f_2 . Die Milnor- und Tjurinazahlen von f_1 und f_2 sind dann unendlich.

Sei $f_1 = e \cdot (f_2 \circ \phi)$ mit $e \in \mathcal{O}^*(n)$ und $\phi \in \mathcal{B}(n)$.

Dann induziert der Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^2(n) &\xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^2(n) \\ h &\longmapsto e \cdot (h \circ \phi) \end{aligned}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine biholomorphe Abbildung $J_k^2(n) \xrightarrow{\sim} J_k^2(n)$, die den Rechtsorbit von $j_k(f_2)$ im Jetraum biholomorph auf den Rechtsorbit von $j_k(f_1)$ im Jetraum abbildet. Die Kodimensionen dieser Untermannigfaltigkeiten im Jetraum sind also gleich.

Haben f_1 und f_2 isolierte Singularitäten in O , so folgt mit dem Korollar aus 1.2.3 für genügend hohes k :

$$\mu(f_1) - 1 = \mu(f_2) - 1.$$

Die entsprechende Überlegung für Kontaktorbits zeigt

$$\tau(f_1) - 1 = \tau(f_2) - 1. \quad \square$$

1.2.5 Definition:

$f \in \mathfrak{m}(n)$ heißt k -bestimmt ($k \in \mathbb{N}$), wenn jedes $g \in f + \mathfrak{m}^{k+1}(n)$ rechtsäquivalent zu f ist.

Insbesondere ist f dann rechtsäquivalent zu dem Keim des Polynoms, das durch seine Taylorentwicklung bis zum Grad k gegeben wird.

Satz:

Seien $f \in \mathfrak{m}(n)$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^k(n) \subset \mathfrak{m}(n) \cdot \Delta f + \mathfrak{m}^{k+1}(n)$.
Dann ist f k -bestimmt.

Beweis: [Was] Theorem 2.6. □

Korollar:

Sei $f \in \mathfrak{m}(n)$ und $\mu(f) < \infty$. Dann ist f $(\mu(f)+1)$ -bestimmt.

1.3 Korng, Multiplizität und Tangentialkegel

1.3.1 Definition:

Sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$. Dann wird der Korng von f definiert als der Korng der Hesseschen Matrix von f :

$$\text{Korng}(f) := \text{Korng} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (O) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Lemma:

Der Korng ist invariant unter Kontaktäquivalenz und auf $\mathfrak{m}^2(n)$ halbstetig nach oben. □

Satz: (verallgemeinertes Morse - Lemma)

Sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$, $\text{Korng}(f) = \ell$. Dann gibt es ein $g \in \mathfrak{m}^3(\ell)$ mit

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim_R g(x_1, \dots, x_\ell) + x_{\ell+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Beweis: [Si 1] (3.2) oder [Was] 5.12. □

Definition:

Seien $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ und $g \in \mathfrak{m}^2(\ell)$ mit $\ell \leq n$. Dann heißen f und g stabil äquivalent, wenn

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim_R g(x_1, \dots, x_\ell) + x_{\ell+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Lemma:

Seien $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ und $g \in \mathfrak{m}^2(\ell)$ stabil äquivalent.

Dann gilt $\mu(f) = \mu(g)$ und $\tau(f) = \tau(g)$. □

1.3.2 Definition:

Sei $f \in \mathfrak{m}(n) - \{0\}$ und

$$f = \sum_{v=1}^{\infty} f_v,$$

wobei die f_v homogene Polynome vom Grad $v \in \mathbb{N}$ (bzw. das Nullpolynom) seien. Die kleinste Zahl $v \geq 1$ für die f_v ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom ist, nennen wir die Multiplizität $v(f)$ von f .

Den Nullstellendivisor von $f_{v(f)}$ im \mathbb{C}^n bezeichnen wir als den Tangentialkegel $T(f)$ von f .

Die Basis des Kegels $T(f)$ ist für $n \geq 1$ eine projektiv-algebraische Hyperfläche in $P_{n-1}(\mathbb{C})$ (im allgemeinen mit mehrfachen Komponenten).

Lemma:

Die Multiplizität ist invariant unter Kontaktäquivalenz und auf $\mathfrak{m}(n) - \{0\}$ halbstetig nach oben.

Sind $f, g \in \mathfrak{m}(n) - \{0\}$ kontaktäquivalent, so sind $T(f)$ und $T(g)$ linear äquivalent. □

1.4 Quasihomogene und Γ -nichtentartete Funktionskeime

1.4.1 Definition:

- a) Ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ heißt quasihomogen vom Grad $d \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der Gewichte $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ (oder kurz: quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$), wenn

$$f = \sum_{v \cdot w = d} a_v x^v \quad (v \in \mathbb{N}_0^n).$$

Dabei bezeichne

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i$$

den quasihomogenen Grad des Monoms x^v bezüglich der Gewichte (w_1, \dots, w_n) .

- b) Eine Potenzreihe $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$, $f \neq 0$, heißt semi-quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d) \in \mathbb{N}^{n+1}$, wenn gilt

$$f = \sum_{v \cdot w \geq d} a_v x^v$$

und wenn 0 eine isolierte Singularität der Faser $g^{-1}(0)$ des Polynoms

$$g := \sum_{v \cdot w = d} a_v x^v$$

ist. g heißt der Hauptteil von f .

- c) Ein Funktionskeim $f \in \mathfrak{m}(n)$ heißt (semi-)quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$, wenn seine Taylorentwicklung (semi-)quasihomogen von diesem Typ ist.

Satz:

Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, ein Polynom. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$.
 (ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^d f(x).$$

- (iii) f genügt der Eulerschen Differentialgleichung

$$d \cdot f = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Beweis: [Br 5] 4.4. □

Theorem: (Saito)

$f \in \mathfrak{m}^2(n)$ habe eine isolierte Singularität in O .

Dann sind äquivalent:

- (i) f ist rechtsäquivalent zum Keim eines quasihomogenen Polynoms.
- (ii) $f \in \Delta f$
- (iii) Der Kontakt- und der Rechtsorbit von f fallen zusammen.
- (iv) $\mu(f) = \tau(f)$

Beweis:

"(ii) \iff (iv)": $f \in \Delta f \iff (f) + \Delta f = \Delta f \iff \mu(f) = \tau(f)$.

"(i) \implies (iii)": Sei o.B.d.A. f quasihomogen. Ist dann $f \sim_K g$, so folgt leicht: $f \sim_R g$ (siehe z.B. [Du 1] Lemma 9.1).

"(iii) \implies (iv)": Fallen für jedes k der Rechts- und der Kontaktorbit von $j_k(f)$ im Jetraum zusammen, so sind deren Kodimensionen gleich und die Behauptung folgt aus 1.2.3.

"(ii) \implies (i)": Dies ist das Hauptergebnis der Arbeit [Sa 1] von Saito. □

Theorem: (Arnold)

Sei $f \in \mathfrak{m}(n)$ semiquasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit Hauptteil g . Dann gilt:

(i)
$$\mu(f) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{w_i} - 1 \right)$$

- (ii) Wählt man Monome, die eine Basis von $\mathcal{O}(n)/\Delta g$ repräsentieren, und sind ψ_1, \dots, ψ_r die Monome dieser Basis mit höherem quasihomogenen Grad als d , so gibt es $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ mit

$$f \sim_R g + \sum_{i=1}^r a_i \psi_i .$$

Beweis: [Ar 2], Folgerung 4.8, Theorem 7.2 .

Vergleiche auch IV.2.1 □

1.4.2 Das folgende Lemma ist für die Bestimmung von Kontakt-orbits nützlich:

Lemma:

Sei $g \in \mathfrak{m}^2(n)$ quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$, $\psi \in \mathfrak{m}^2(n)$ quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d')$ mit $d' > d$ und $e \in \mathcal{O}^*(n)$ eine Einheit.

Hat dann

$$f := g + e \cdot \psi$$

eine isolierte Singularität in 0 ,

so gilt

$$f \sim_K g + \psi.$$

Beweis:

Für $\eta \in \mathcal{O}^*(n)$ sei $\phi \in \mathcal{B}(n)$ der durch

$$y_1 = x_1 \cdot \eta^{w_1}, \dots, y_n = x_n \cdot \eta^{w_n}$$

definierte Koordinatenwechsel. Dann ist

$$f \circ \phi = \eta^d [g + \eta^r (e \circ \phi) \cdot \psi] \quad \text{mit } r = d' - d.$$

Da $\eta^{-d}(f \circ \phi)$ endlich-bestimmt ist, folgt die Behauptung, wenn für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\eta^r \cdot (e \circ \phi) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}^{\ell+1}}$$

eine Lösung $\eta \in \mathcal{O}^*(n)$ besitzt.

Um dies nachzuweisen, stelle man e und η als Reihen

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} e_i, \quad \eta = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i$$

dar, wobei die e_i und η_i für $i \geq 0$ quasihomogene Polynome vom Typ $(w_1, \dots, w_n; i)$ bzw. das Nullpolynom seien.

Dies setze man in $\eta^r \cdot (e \circ \phi)$ ein und fasse wieder nach quasihomogenen Polynomen gradweise zusammen:

$$\eta^r \cdot (e \circ \phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i,$$

die θ_i quasihomogen vom Grad i bzw. das Nullpolynom.

Dabei ist

$$\theta_0 = \eta_0^r \cdot e_0 \quad \text{mit } e_0 \neq 0,$$

und

$$\theta_i = r \cdot \eta_0^{r-1} \cdot e_0 \cdot \eta_i + P_i(\eta_0, \dots, \eta_{i-1}, e_0, \dots, e_i)$$

für $i > 0$, wobei P_i ein Polynom ist.

Rekursiv lassen sich also η_0, \dots, η_k mit $\eta_0 \neq 0$ so bestimmen, daß für gegebenes ℓ und genügend großes k gilt:

Für

$$n := \sum_{i=0}^k \eta_i$$

ist

$$\sum_{i=0}^k \theta_i = 1 \text{ und } \sum_{i=k+1}^{\infty} \theta_i \in m^{\ell+1}.$$

□

1.4.3 Nach dem in 1.4.1 genannten Resultat von Arnold läßt sich die Milnorzahl eines semiquasihomogenen Funktionskeimes aus dem Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ berechnen. Dies wurde von Kushnirenko unter Benutzung von Newtonpolyeder verallgemeinert:

Definition:

$f \in m^2(n) - \{0\}$ habe die Taylorentwicklung

$$\sum a_\nu x^\nu.$$

a) $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ sei die konvexe Hülle der Menge

$$\bigcup_{\nu \in \text{supp}(f)} (\nu + \mathbb{R}_+^n)$$

wobei $\text{supp}(f) := \{\nu \in \mathbb{N}_0^n \mid a_\nu \neq 0\}$.

b) Das Newtonpolygon $\Gamma(f)$ von f ist die Vereinigung der kompakten Seiten des Polyeders $\Gamma_+(f)$.

$\Gamma_-(f)$ sei die Vereinigung aller Verbindungsstrecken $\{t \cdot \nu \mid t \in [0, 1]\}$, $\nu \in \Gamma(f)$, von 0 mit $\Gamma(f)$.

c) Die Newtonzahl von f wird definiert als

$$N(f) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot V_i$$

Dabei ist $V_0 := 1$ und für $1 \leq i \leq n$ ist V_i die Summe der i -dimensionalen Volumina der Durchschnitte von $\Gamma_-(f)$ mit den i -dimensionalen Koordinatenunterräumen

$$U_I := \{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \nu_\ell = 0 \text{ für } \ell \in I\}, \quad I \subset \{1, \dots, n\}, \\ |I| = n - i.$$

d) f heißt Γ -nichtentartet, wenn für jede kompakte Seite Δ von $\Gamma(f)$ und

$$f_{\Delta} := \sum_{v \in \Delta} a_v x^v$$

die Polynome

$$x_1 \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial x_n}$$

keine gemeinsame Nullstelle in $(\mathbb{C} - \{0\})^n$ haben.

Theorem: (Kushnirenko)

- (i) Für alle $f \in \mathfrak{m}^2(n) - \{0\}$ ist die Milnorzahl größer oder gleich der Newtonzahl:

$$\mu(f) \geq N(f).$$
- (ii) Ist $f \in \mathfrak{m}^2(n) - \{0\}$ Γ -nichtentartet und hat f eine isolierte Singularität in 0 , so gilt:

$$\mu(f) = N(f).$$
- (iii) Sei $f \in \mathfrak{m}^2(n) - \{0\}$. Dann ist eine offene, dichte und zusammenhängende Teilmenge aller $g \in \mathfrak{m}^2(n)$ mit gleichem Newtonpolygon wie f Γ -nichtentartet.

Beweis:

Siehe [Kou] 1.10. Theorem I.

Seine Definition der Newtonzahl weicht von der oben genannten ab. Daher muß noch 1.12. Proposition (i) aus seiner Arbeit berücksichtigt werden.

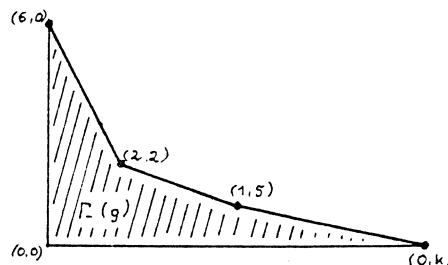
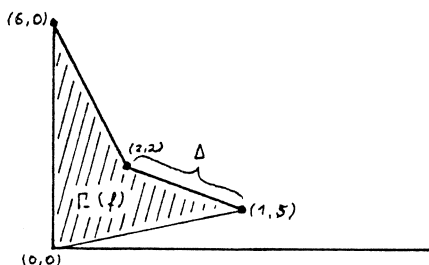
Weitere Literatur: [Va 1], [Eh].

□

Beispiel:

$$f(x, y) := x^6 + x^2 y^2 + xy^5,$$

$$g(x, y) := x^6 + x^2 y^2 + xy^5 + y^k \text{ mit } k \geq 8,$$



f und g sind Γ -nichtentartet: Zum Beispiel ist die Verbindungsstrecke der Punkte $(6,0)$ und $(2,2)$ eine Seite von $\Gamma(f)$ und $\Gamma(g)$. Bezeichnet Δ diese Seite, so ist

$$f_{\Delta}(x, y) = g_{\Delta}(x, y) = x^6 + x^2 y^2,$$
$$x \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial x} = 6x^5 + 2x^2 y^2, \quad y \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial y} = 2x^2 y,$$

Da $x \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial x} = y \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial y} = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$

ist für f und für g die Bedingung der r -Nichtentartetheit bezüglich der Seite Δ erfüllt.

Für die Newtonzahlen ergibt sich:

$$N(f) = 2! \cdot \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right) - 1! \cdot 6 + 1 = 15$$

$$N(g) = 2! \cdot \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & k \end{vmatrix} \right) - 1! \cdot (6 + k) + 1 = 15.$$

Also folgt $\mu(f) = \mu(g) = 15$.

I.2 Entfaltungen, Deformationen, transversale Scheiben,
 μ -Homotopie und μ -Vereinfachung, Modularität

I.2.1 Entfaltungen von Funktionskeimen

Wir verwenden den Begriff Entfaltung, wenn wir Störungen von Funktionskeimen, den Begriff Deformation, wenn wir Störungen von Mengenkeimen betrachten.

2.1.1 Definition:

Es sei $f \in \mathcal{M}(n)$ ein holomorpher Funktionskeim. Eine Entfaltung von f ist ein holomorpher Abbildungskeim

$$\begin{aligned} \bar{F}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \quad \text{mit} \\ \bar{F}|_{\mathbb{C}^n \times \{0\}} &= f \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\pi_{\bar{F}}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ die kanonische Projektion auf den Parameterraum \mathbb{C}^p der Entfaltung \bar{F} . Die Dimension des Parameterraumes heißt Kodimension der Entfaltung. Im folgenden werden wir die Koordinate des \mathbb{C}^n mit x , die Koordinate des \mathbb{C}^p mit s bezeichnen. Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir einen holomorphen Repräsentanten für \bar{F} ebenfalls mit \bar{F} bezeichnen.

Definition:

- (i) Ein K -Morphismus $(u, \phi): \mathcal{G} \longrightarrow \bar{F}$ zwischen Entfaltungen $\bar{F} \in \mathcal{M}(n+p)$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(n+q)$ von f ist ein Paar (u, ϕ) von holomorphen Abbildungskeimen mit folgenden Eigenschaften
- (a) $u \in \mathcal{O}(n+q)$ Einheit
 $\phi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0)$
 - (b) ϕ respektiert die Faserung, das heißt es existiert $\hat{\phi}: (\mathbb{C}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ mit $\pi_{\bar{F}} \circ \phi = \hat{\phi} \circ \pi_{\mathcal{G}}$
 - (c) $\phi|_{\mathbb{C}^n \times \{0\}} = \text{id}|_{\mathbb{C}^n \times \{0\}}$
 - (d) $\mathcal{G} = u \cdot (\bar{F} \circ \phi)$

- (ii) Ist $u \equiv 1$, so heißt $\phi: \mathcal{G} \longrightarrow \bar{F}$ ein R -Morphismus.
- (iii) Eine Entfaltung \bar{F} von f heißt R -versell (K -versell), wenn es zu jeder anderen Entfaltung \mathcal{G} von f einen R -Morphismus (K -Morphismus) von \mathcal{G} in \bar{F} gibt.

Im Angelsächsischen spricht man von "versal unfolding". Dabei werden mit "versal" die Begriffe universell und transversal assoziiert.

Der folgende auf Mather zurückgehende Satz gibt ein algebraisches Kriterium für die Versalität von Entfaltungen. Beweise findet man z. B. in den Arbeiten von Wassermann, Zakalyukin und Martinet (siehe [Was], [Za], [Ma]). Die dort angegebenen Beweise lassen sich von \mathbb{R} auf \mathbb{C} übertragen. Sie beruhen im wesentlichen auf der Integration von Vektorfeldern, die mit dem Vorbereitungssatz von Malgrange konstruiert werden. Im Fall \mathbb{C} verwendet man den Weierstraßschen Vorbereitungssatz.

Wassermann läßt in [Was] bei der Definition der R -Morphismen zusätzlich noch Translationen von \mathbb{C} zu. Dies erklärt die Abweichungen von den in [Was] angegebenen Formeln. Unsere Definition stimmt mit der von Gabrielov und Arnold benutzten Definition überein.

Theorem (Mather):

Es sei $f \in \mathcal{M}(n)$ ein holomorpher Funktionskeim.

- (i) Eine Entfaltung $\bar{F}: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ von f mit Parametern $s \in \mathbb{C}^p$ ist genau dann R -versell, wenn

$$\mathcal{O}(n) = \Delta f + \left\langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial s_j}(x, 0) \mid 1 \leq j \leq p \right\rangle_{\mathbb{C}}, \text{ das heißt}$$

$$\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial s_j}(x, 0) \mid 1 \leq j \leq p \right\}$$

repräsentiert ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $\mathcal{O}(n) / \Delta f$

- (ii) Eine Entfaltung $\bar{F}: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ von f mit Parametern $s \in \mathbb{C}^p$ ist genau dann K -versell, wenn

$$\mathcal{O}(n) = (f)_{\mathcal{O}(n)} + \Delta f + \left\langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial s_j}(x, 0) \mid 1 \leq j \leq p \right\rangle_{\mathbb{C}}, \text{ das heißt}$$

$\left\{ \frac{\partial F}{\partial s_j}(x, 0) \mid 1 \leq j \leq p \right\}$ repräsentiert ein Erzeugendensystem für den Vektorraum $\mathcal{O}(n) / (f) + \Delta f$

(iii) Zwei R-verselle (K-verselle) Entfaltungen von f mit gleicher Kodimension sind R-isomorph (K-isomorph).

Ein Funktionskeim $f \in \mathcal{M}(n)$ besitzt also genau dann eine verselle Entfaltung, wenn f in 0 höchstens eine isolierte Singularität besitzt (siehe 1.2.2). R-verselle bzw. K-verselle Entfaltungen von f der Kodimension $\mu(f)$ bzw. $\tau(f)$ heißen R-semiuniversell bzw. K-semiuniversell. Semiuniverselle Entfaltungen sind also verselle Entfaltungen minimaler Kodimension.

2.1.2 Sei $\bar{F}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ein holomorpher Repräsentant einer Entfaltung $\bar{F}: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ von f mit $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+p}$ offen. Für $(x^0, s^0) \in U$ mit $\bar{F}(x^0, s^0) = 0$ definieren wir holomorphe Abbildungskeime

$$\begin{aligned} f_{(x^0, s^0)} &: (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ & \quad x \longmapsto \bar{F}(x+x^0, s^0) \\ \bar{F}_{(x^0, s^0)} &: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ & \quad (x, s) \longmapsto \bar{F}(x+x^0, s+s^0) \end{aligned}$$

$\bar{F}_{(x^0, s^0)}$ ist dann eine Entfaltung von $f_{(x^0, s^0)}$, und es gilt

Satz: (Offenheit der Versalität)

Sei $\bar{F}: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ eine R-verselle (K-verselle) Entfaltung von f und $\bar{F}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ein holomorpher Repräsentant. Dann existiert eine offene Umgebung $0 \in V \subset U$, so daß für alle $(x^0, s^0) \in V \cap \bar{F}^{-1}(0)$ $\bar{F}_{(x^0, s^0)}$ eine R-verselle (K-verselle) Entfaltung von $f_{(x^0, s^0)}$ ist.

Beweis:

Dies ist eine einfache Folgerung aus dem Theorem in 2.1.1. o.B.d.A. sei U so klein, daß $\mu(f_{(x^0, s^0)}) \leq \mu(f) =: \mu$ für alle $(x^0, s^0) \in U \subset \bar{F}^{-1}(0)$.

Dann ist (siehe 1.2.1) $\mathcal{M}^\mu \subset \Delta f_{(x^0, s^0)}$

und deshalb ist $\bar{f}_{(x^0, s^0)}$ genau dann eine K-verselle Entfaltung, wenn

$$\mathcal{O}(n) = (f_{(x^0, s^0)})_{\mathcal{O}(n)} + \Delta f_{(x^0, s^0)} + \left\langle \frac{\partial^2 \bar{f}_{(x^0, s^0)}}{\partial s_j^2}(x, 0) \mid 1 \leq j \leq p \right\rangle_{\mathbb{C}} + \mathfrak{m}^{\mu}(n)$$

Dies ist eine Transversalitätsbedingung affiner Teilräume in $J_{\mu-1}^{\circ}(n)$. Der Beweis für R-verselle Entfaltungen ist analog. □

2.1.3 Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0, $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ein holomorpher Repräsentant einer Entfaltung $\bar{f}: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ von f . Wir definieren dann die folgenden Mengen:

$$C_{\bar{f}} = \{ (x^0, s^0) \in U \mid \bar{f}(\cdot, s^0) \text{ hat in } x^0 \text{ kritischen Punkt mit kritischem Wert } 0 \}$$

$$D_{\bar{f}} = \pi_{\bar{f}}(C_{\bar{f}})$$

$$D_{\bar{f}, \mu} = \{ s^0 \in D_{\bar{f}} \mid \text{es existiert } (x^0, s^0) \in C_{\bar{f}} \text{ mit } \mu(f_{(x^0, s^0)}) = \mu(f) \}$$

Die Mengenkeime $(C_{\bar{f}}, 0)$, $(D_{\bar{f}}, 0)$, $(D_{\bar{f}, \mu}, 0)$ sind unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Entfaltung. Es gilt

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 mit Milnorzahl μ und Tjurinazahl τ . Dann gilt für eine R-semiuniverselle Entfaltung $F \in \mathcal{M}(n+\mu)$ bzw. eine K-semiuniverselle Entfaltung $F \in \mathcal{M}(n+\tau)$

- (i) $(C_{\bar{f}}, 0)$ ist ein glatter analytischer Mengenkeim der Dimension $\mu - 1$ bzw. $\tau - 1$.
- (ii) $(D_{\bar{f}}, 0)$ ist ein irreduzibler analytischer Hyperflächenkeim in $(\mathbb{C}^{\mu}, 0)$ bzw. $(\mathbb{C}^{\tau}, 0)$.
- (iii) $\pi_{\bar{f}}|_{(C_{\bar{f}}, 0)} \rightarrow (D_{\bar{f}}, 0)$ ist die Normalisierung.

Beweis:

Einen Beweis dieses Satzes für den Fall der R-Äquivalenz findet man in der Arbeit von Gabriellov [Ga 3], für den Fall der K-Äquivalenz in der Arbeit von Vohmann [Vo]:

Für eine K-semiuniverselle Entfaltung \bar{F} ist $(\bar{F}^{-1}(0), 0)$ glatt (folgt aus 2.1.1) und die Mengenkeime $(C_{\bar{F}}, 0)$ bzw. $(D_{\bar{F}}, 0)$ sind die kritische Menge bzw. die Diskriminante der semiuniversellen Deformation

$$(f^{-1}(0), 0) \hookrightarrow (\bar{F}^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\pi_{\bar{F}}|} (C^{\tau(f)}, 0)$$

(vgl. 2.3).

□

Für eine R-semiuniverselle Entfaltung \bar{F} von f hat Gabriellov in [Ga 3] die Dimension des analytischen Mengenkeimes $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$ als die eigentliche Modularität definiert. Wir bezeichnen $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$ als das $\mu = \text{const. Stratum}$ der Entfaltung \bar{F} .

2.1.4 Bemerkung:

Es seien

$$F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

$$G: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

Entfaltungen eines Funktionskeimes $f \in \mathcal{M}(n)$, sowie

$$(u, \phi): G \longrightarrow F$$

ein K-Morphismus. Dann existieren offene Umgebungen

$$0 \in U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$$

$$0 \in V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q$$

und holomorphe Repräsentanten

$$F: U \longrightarrow \mathbb{C}, G: V \longrightarrow \mathbb{C}, \phi: V \longrightarrow U, u: V \longrightarrow \mathbb{C}$$

u verschwindet nirgends auf V ,

so daß mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$G_{(x,s)}(\cdot, 0) \sim_K F_{\phi(x,s)}(\cdot, 0)$$

für $(x,s) \in V \cap G^{-1}(0)$. Insbesondere gilt dann

$$\phi(C_G) \subset C_F$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für R-Morphismen.

I.2.2 Deformationen komplexer Raumkeime

Wir folgen der Darstellung von Vohmann [Vo]. Mit (X, x) bezeichnen wir in diesem Abschnitt komplexe Raumkeime. Ist $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0, so ist $(f^{-1}(0), 0)$ Keim einer isolierten Hyperflächensingularität. Für $n \geq 2$ ist $(f^{-1}(0), 0)$ reduziert.

Definition:

- (i) Eine Deformation des komplexen Raumkeimes (X, x) ist ein platter holomorpher Abbildungskeim

$$\pi: (Y, y) \longrightarrow (S, s)$$

zusammen mit einem Isomorphismus

$$i: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

auf die Faser von π über s .

- (ii) Ein Morphismus der Deformation

$$(i', \pi'): (X, x) \xleftarrow{i'} (Y', y') \xrightarrow{\pi'} (S', s')$$

in die Deformation

$$(i, \pi): (X, x) \xleftarrow{i} (Y, y) \xrightarrow{\pi} (S, s)$$

ist ein Paar $(\phi, \hat{\phi})$ holomorpher Abbildungskeime, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & i' & (Y', y') & \xrightarrow{\pi'} & (S', s') \\ & \nearrow & \downarrow \phi & & \downarrow \hat{\phi} \\ (X, x) & \xrightarrow{i} & (Y, y) & \xrightarrow{\pi} & (S, s) \end{array}$$

- (iii) Eine Deformation $(i, \pi): (X, x) \xleftarrow{i} (Y, y) \xrightarrow{\pi} (S, s)$ versell, wenn es zu jeder anderen Deformation (i', π') von (X, x) einen Morphismus $(\phi, \hat{\phi})$ von (i', π') in (i, π) gibt. Ist die Tangentialabbildung von $\hat{\phi}$ durch (i', π') eindeutig bestimmt, so heißt die Deformation semiuniversell.

Bemerkung:

- (i) Ist $\pi: Y \longrightarrow S$ ein Morphismus komplexer Räume, so ist die Menge der Punkte in Y , wo π platt ist, offen in Y .
- (ii) Ist (Y, y) ein vollständiger Durchschnitt und ist (S, s) regulär, so gilt:

$$\pi: (Y, y) \longrightarrow (S, s) \quad \text{ist genau dann platt, wenn}$$

$$\dim (Y, y) = \dim (Y_s, y) + \dim (S, s)$$
(siehe [Fi], 3.10, 3.19, 3.20)
Ein Raumkeim (Y, y) ist genau dann ein vollständiger Durchschnitt, wenn er isomorph zu der Faser eines holomorphen Abbildungskeimes $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ mit $\dim (Y, y) = n$ ist.
- (iii) Die Existenz semiuniverseller Deformationen für vollständige Durchschnitte mit isolierter Singularität wurde von Tjurina [Tj 2] und Kas - Schlessinger [K - S] bewiesen.

Zwischen K -versellen Entfaltungen von Funktionen $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und versellen Deformationen der zugehörigen isolierten Hyperflächensingularitäten $(f^{-1}(0), 0)$ besteht ein enger Zusammenhang:

Sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 ,

$\bar{F}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ eine Entfaltung von f ,

$\pi_{\bar{F}}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ die kanonische Projektion,

$\pi_{\bar{F}}|$ die Einschränkung auf $(\bar{F}^{-1}(0), 0)$.

Dann ist

$$(f^{-1}(0), 0) \longleftarrow (\bar{F}^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\pi_{\bar{F}}|} (\mathbb{C}^p, 0)$$

eine Deformation. Sie heißt die zu \bar{F} assoziierte Deformation.

Sind \bar{F}, \bar{G} zwei Entfaltungen von f , so induziert jeder K -Morphismus von \bar{G} in \bar{F} einen Morphismus zwischen den zugehörigen Deformationen.

Es gilt

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0. Ferner sei $\bar{F} \in \mathcal{M}^w(n+p)$ eine K -verselle Entfaltung von f . Dann ist die zu \bar{F} assoziierte Deformation eine verselle Deformation von $(f^{-1}(0), 0)$.

Ist $p_i = \tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / (f) + \Delta f$, so ist die Deformation semiuniversell.

Beweis:

Für einen kurzen Beweis siehe Kas - Schlessinger [K-S]. Man benutze das Kriterium für K -verselle Entfaltungen aus 2.1.1. Man beachte, daß Morphismen zwischen Entfaltungen Morphismen zwischen den assoziierten Deformationen induzieren. \square

Wir wollen im folgenden für eine Deformation

$$(i, \pi): (X, x) \xleftarrow{i} (Y, y) \xrightarrow{\pi} (S, s)$$

einer isolierten Hyperflächensingularität (X, x) die kritische Menge sowie die Diskriminante definieren. Wir definieren diese Mengen als analytische Mengenkeime und geben keine Strukturgarbe an, da es uns nur auf die zugrunde liegenden Mengen ankommt.

Es sei $\pi: Y \rightarrow S$ ein platter Repräsentant. Die Menge C der singulären Punkte der Fasern von π ist eine analytische Menge. Der wohldefinierte Mengenkeim (C, y) heißt kritische Menge. Da $\pi|_{(C, y)} \rightarrow (S, s)$ endlich ist, ist für einen geeigneten Repräsentanten $\pi: Y \rightarrow S$ $D := \pi(C)$ analytisch und definiert einen Keim (D, s) . (D, s) heißt die Diskriminante.

Ist \bar{F} eine Entfaltung eines holomorphen Funktionskeims mit endlicher Milnorzahl, so ist $(C_{\bar{F}}, 0)$ die kritische Menge und $(D_{\bar{F}}, 0)$ die Diskriminante der zu \bar{F} assoziierten Deformation.

I.2.3 Transversale Scheiben

2.3.1 Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ ein Funktionskeim mit isolierter Singularität in 0. Der R -Orbit bzw. der K -Orbit von $j_k(f)$ in $J_k^0(n)$ ist eine komplexe Untermannigfaltigkeit, und sein Tangentialraum in $j_k(f)$ ist $j_k(\mathcal{M}\Delta f)$ bzw. $j_k(\mathbb{C} + \mathcal{M}\Delta f)$ (siehe 1.1.2).

Wir haben in 1.2.3 bewiesen, daß

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^2 / \mathcal{M}\Delta f &= \mu(f) - 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^2 / (\mathbb{C} + \mathcal{M}\Delta f) &= \tau(f) - 1 \end{aligned}$$

Deshalb ist für $k \geq \mu(f)$ die Kodimension des R -Orbits bzw. des K -Orbits von $j_k(f)$ im Raum $J_k^2(n)$ gleich $\mu(f) - 1$ bzw. $\tau(f) - 1$ (siehe 1.2.3).

Definition:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0. Ferner repräsentieren $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{O}(n)$ ein Erzeugendensystem des \mathbb{C} -Vektorraumes

$$\mathcal{M}^2 / \mathcal{M}\Delta f \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}^2 / (\mathbb{C} + \mathcal{M}\Delta f)$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathcal{M}^2(n) \\ t &\longrightarrow f + \sum_{j=1}^r t_j \psi_j \end{aligned}$$

heißt dann eine lineare R -transversale (bzw. K -transversale) Scheibe für f in $\mathcal{M}^2(n)$. Ist ferner $r = \mu(f) - 1$ bzw. $r = \tau(f) - 1$, so heißt \bar{T} minimale R -transversale (bzw. K -transversale) Scheibe für f .

Satz: (Offenheit der Versalität)

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und $\bar{\tau}: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$ eine lineare R-transversale (K-transversale) Scheibe für f. Dann existiert eine offene Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{C}^r$, so daß für alle $p \in U$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_p: \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathcal{M}^2(n) \\ t &\longrightarrow \bar{\tau}(p+t) \end{aligned}$$

eine lineare R-transversale (K-transversale) Scheibe für $\bar{\tau}(p)$ ist.

Beweis:

Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Definition.

Es existiert eine offene Umgebung $0 \in V \subset \mathbb{C}^r$, so daß für $p \in U$ $\mu(\bar{\tau}(p)) \leq \mu(f) =: \mu$ und damit $\mathcal{M}^{\mu+1} \subset \mathcal{M}_{\Delta} \bar{\tau}(p)$ gilt. Dann ist $\bar{\tau}_p$ genau dann eine R-transversale bzw. K-transversale Scheibe für $\bar{\tau}(p)$, wenn

$$\langle \psi_1, \dots, \psi_r \rangle_{\mathbb{C}} + \mathcal{M}_{\Delta} \bar{\tau}(p) + \mathcal{M}^{\mu+1} = \mathcal{M}^2 \quad \text{bzw.}$$

$$\langle \psi_1, \dots, \psi_r \rangle_{\mathbb{C}} + \mathcal{M}_{\Delta} \bar{\tau}(p) + (\bar{\tau}(p))_{\mathcal{O}} + \mathcal{M}^{\mu+1} = \mathcal{M}^2$$

Dies ist eine Transversalitätsbedingung affiner Teilräume im endlichdimensionalen Vektorraum $J_{\mu}^2(n) = \mathcal{M}^2 / \mathcal{M}^{\mu+1}$. Für die Teilräume kann man ein stetig vom Parameter p abhängendes Erzeugendensystem wählen. Die Bedingung ist dann äquivalent zum Nichtverschwinden gewisser Determinanten, die Polynome in $p \in \mathbb{C}^r$ sind. □

Satz: (Dimensionssatz)

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ ein Funktionskeim mit isolierter Singularität,

$\bar{\tau}: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$ mit $\bar{\tau}(t) = f + \sum t_j \psi_j$ eine lineare R-transversale (K-transversale) Scheibe für f. Wir setzen

zusätzlich voraus, daß ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

ψ_1, \dots, ψ_r linear unabhängig modulo \mathcal{M}^k sind.

Dann ist der Mengenkeim

$$(\{t \in \mathbb{C}^r \mid \bar{\tau}(t) \sim_R f\}, 0) \text{ bzw. } (\{t \in \mathbb{C}^r \mid \bar{\tau}(t) \sim_K f\}, 0)$$

ein glatter analytischer Mengenkeim der Dimension

$r - \mu(f) + 1$ bzw. $r - \tau(f) + 1$.

Beweis:

o.B. d. A. sei $k \geq \mu(f) + 1$. Dann existiert eine offene Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{C}^r$, so daß $\bar{\tau}(p)$ für $p \in U$ k -bestimmt ist (Halbstetigkeit der Milnorzahl). Das Bild von $j_k \circ \bar{\tau}$ ist eine r -dimensionale Untermannigfaltigkeit in $J_k^2(n)$. Weil $k \geq \mu(f) + 1$, ist der R -Orbit (K -Orbit) von $j_k(f)$ in $J_k^2(n)$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\mu(f) - 1$ ($\tau(f) - 1$). Diese beiden Mannigfaltigkeiten schneiden sich nach Voraussetzung an $\bar{\tau}$ transversal in $j_k(f)$. Deshalb existiert eine offene Umgebung $j_k(f) \in V \subset J_k^2(n)$, so daß

$$\text{Bild } j_k \circ \bar{\tau} \cap \text{Orbit } j_k(f) \cap V$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $r - \mu(f) + 1$ bzw. $r - \tau(f) + 1$ ist. Nach Konstruktion gilt für $t \in U$

$$\bar{\tau}(t) \sim_R f \iff j_k(\bar{\tau}(t)) \in R\text{-Orbit von } j_k(f)$$

bzw. $\bar{\tau}(t) \sim_K f \iff j_k(\bar{\tau}(t)) \in K\text{-Orbit von } j_k(f)$. \square

2.3.2 Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen minimalen transversalen Scheiben und semiuniversellen Entfaltungen.

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ ein Funktionskeim mit isolierter Singularität in 0 . Es bezeichne μ bzw. τ die Milnorzahl bzw. die Tjurinanzahl von f . Wir setzen $r = \mu - 1$ bzw. $r = \tau - 1$. Es sei

$$\bar{\tau}: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$$

eine minimale lineare R -transversale (bzw. K -transversale) Scheibe für f und

$$\bar{F}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{r+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

eine R -semiuniverselle (bzw. K -semiuniverselle) Entfaltung von f . Dann existiert ein holomorpher Abbildungskeim

$$\Lambda: (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}_{\bar{F}}, 0)$$

mit folgenden Eigenschaften:

Es existieren holomorphe Repräsentanten

$$\bar{F}: U \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \Lambda: V \longrightarrow \mathbb{C}_{\bar{F}},$$

so daß

- (i) $\bar{\gamma}(t) \sim_{R(K)} \bar{F}_{\Lambda(t)}(\cdot, 0)$ für $t \in V$
- (ii) $\Lambda: V \longrightarrow C_{\bar{F}}$ ist endlich und surjektiv

Beweis:

Wir führen den Beweis o.B.d.A. nur für den Fall der K -Äquivalenz. $G \in \mathcal{M}(n+r)$ bezeichne die durch

$$G(x, t) := \bar{\gamma}(t)(x)$$

definierte Entfaltung von f . Es existiert dann ein K -Morphismus $(u, \phi): G \longrightarrow \bar{F}$, und es gilt

$$\Lambda := \phi \mid \{0\}_x \times \mathbb{C}_t^r \longrightarrow (C_{\bar{F}}, 0),$$

da $\bar{\gamma}(t) \in \mathcal{M}^2(n)$. Die Wahl geeigneter Repräsentanten für \bar{F} und Λ ergibt die Behauptung (i) (siehe 2.1.4).

Es ist $\Lambda: (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (C_{\bar{F}}, 0)$ Keim einer endlichen Abbildung, da $\bar{\gamma}(t) \not\sim_K f$ für $0 < |t|$ genügend klein (Dimensionssatz aus 2.3.1). Es ist $\dim(\mathbb{C}^r, 0) = \dim(C_{\bar{F}}, 0)$, und $(C_{\bar{F}}, 0)$ ist irreduzibel (2.1.3). Deshalb ist Λ Keim einer endlichen surjektiven holomorphen Abbildung. Geeignetes Verkleinern von U und V ergibt die Behauptung (ii) (siehe [Fi], 3.2). □

Beispiel:

$$f(x) = x^3 \quad \mu(f) = \tau(f) = 2$$

$\bar{F}(x, s) = x^3 + s_1 + s_2 x$ definiert eine semiuniverselle Entfaltung

$\bar{\gamma}(t) = x^3 + 3tx^2$ definiert eine minimale transversale Scheibe

$$C_{\bar{F}} = \{(t, 2t^3, -3t^2) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_{s_1} \times \mathbb{C}_{s_2}$$

$$D_{\bar{F}} = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 27s_1^2 + 4s_2^3 = 0\}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, 2t^3, -3t^2)(x, 0) &= (x+t)^3 + 2t^3 - 3t^2(x+t) \\ &= \bar{\gamma}(t)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathbb{C} &\longrightarrow C_{\bar{F}} \\ t &\longmapsto (t, 2t^3, -3t^2) \end{aligned}$$

ist eine biholomorphe Abbildung mit $\bar{\gamma}(t) \sim_{R(K)} \bar{F}_{\Lambda(t)}(\cdot, 0)$.

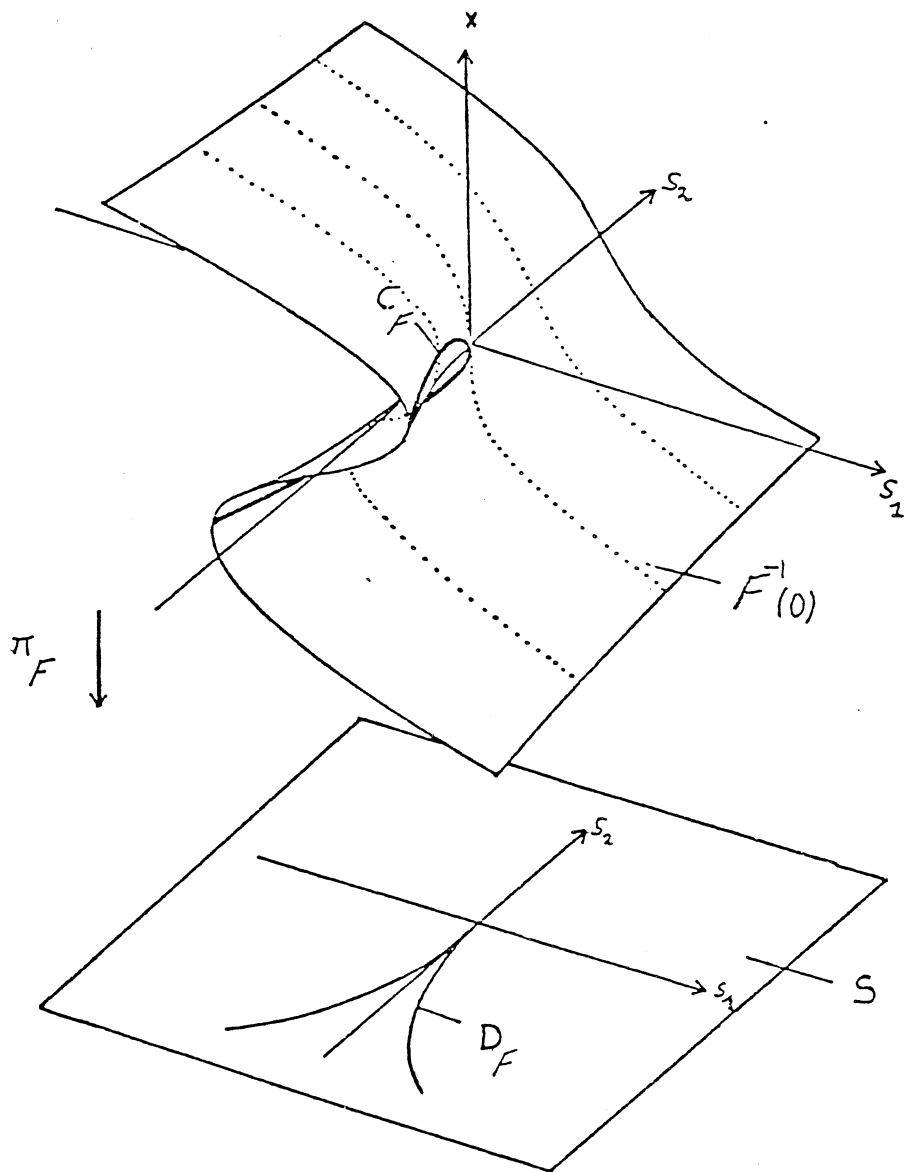
Wir betrachten die zu F assoziierte semiuniverselle Deformation

$$(f^{-1}(0), 0) \hookrightarrow (\bar{F}^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\pi_F} (\mathbb{C}^2, 0)$$

Das folgende Bild zeigt die Fasern der entsprechenden reellen Abbildung

$$\pi_F|: F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Dabei ist π_F die vertikale Projektion auf die horizontale Ebene $S = \mathbb{C}^2$.



I.2.4 μ -Homotopie und μ -Vereinfachung

2.4.1 Definition

Zwei Funktionskeime $f, g \in \mathcal{M}(n)$ heißen μ -homotop, $f \sim_{\mu} g$, wenn es einen stetigen Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathcal{M}(n)$ mit den Eigenschaften

$\gamma(0) = f, \quad \gamma(1) = g, \quad \mu(\gamma(t)) = \mu(f)$ für alle $t \in [0,1]$ gibt.

\sim_{μ} ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(n)$. Die Äquivalenzklassen nennen wir μ -Klassen.

Lemma:

Für Funktionskeime $f, g \in \mathcal{M}(n)$ gilt

$$f \sim_K g \implies f \sim_{\mu} g$$

Beweis: Nach 1.2.4 ist die Milnorzahl eine Invariante unter K -Äquivalenz. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{O}^*(n)$ und $\mathcal{B}(n)$ wegzusammenhängend sind. Dies folgt jedoch aus dem Wegzusammenhang von \mathbb{C}^* und $GL(n, \mathbb{C})$. □

Beispiele:

- (i) Semiquasihomogene Funktionskeime vom gleichen Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ sind μ -homotop.
- (ii) r -nicht entartete Funktionskeime mit isolierter Singularität und gleichem Newtondiagramm sind μ -homotop.

Der folgende Satz zeigt, daß μ -Klassen durch algebraische Bedingungen definiert werden.

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}(n)$, $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{M}(n)$ und $\mathcal{R}(t) := f + \sum_{j=1}^r t_j \psi_j$ mit $t \in \mathbb{C}^r$. Dann gilt

- (i) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Menge $\Sigma(k) := \{t \in \mathbb{C}^r \mid \mu(\mathcal{R}(t)) \geq k\} \subset \mathbb{C}^r$ algebraisch

- (ii) Ist Z eine irreduzible Komponente von $\Sigma(k)$,
so ist $Z - \Sigma(k+1)$ wegzusammenhängend.

Beweis:

- (i) Aufgrund von dem Lemma in 1.2.1 gilt

$$\mu(\mathcal{R}(t)) \geq k \iff \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \Delta \mathcal{R}(t) + \mathfrak{m}^{k+1} \geq k$$

$$\iff \dim_{\mathbb{C}} J_k^{\circ}(n) / j_k \Delta \mathcal{R}(t) \geq k$$

$$\iff \dim_{\mathbb{C}} j_k \Delta \mathcal{R}(t) \geq \dim_{\mathbb{C}} J_k^{\circ}(n) - k$$

Letztere Bedingung ist eine Bedingung an den Rang eines Unterraumes des endlich dimensionalen Vektorraumes $J_k^{\circ}(n)$ und führt auf Determinanten, die Polynome in t_1, \dots, t_r sind.

- (ii) folgt aus einem Satz der algebraischen Geometrie (siehe z.B. [Le], p. 97):

Satz: Sind $X, Y \subset \mathbb{C}^r$ algebraische Mengen, und ist X irreduzibel, so ist $X - Y$ wegzusammenhängend. □

Man kann analog einen entsprechenden Satz für die Tjurinazahl beweisen.

Wir identifizieren $J_k^{\circ}(n)$ mit dem Raum $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$ der Polynome vom Grade höchstens k und betrachten die Abbildung

$$\mathcal{R}(t) = 0 + \sum_{0 < |u| \leq k} t_u x^u$$

Da Funktionskeime mit isolierter Singularität in 0 endlich bestimmt sind, erhält man

Folgerung:

- (i) Die Milnorzahl μ ist auf $\mathcal{M}(n)$ halbstetig nach oben.
(ii) Die Tjurinazahl τ ist auf $\mathcal{M}(n)$ halbstetig nach oben.
(iii) Zu gegebener Milnorzahl existierten nur endlich viele μ - Klassen. □

2.4.2 Definition:

Es seien $f, g \in \mathcal{M}(n)$ holomorphe Funktionskeime, die in 0 höchstens eine isolierte Singularität besitzen. Wir sagen f μ -vereinfacht sich in g , $f \xrightarrow{\mu} g$, wenn jede Umgebung von f in $\mathcal{M}(n)$ eine zu g μ -homotope Funktion enthält.

Kontaktäquivalente Funktionskeime besitzen bezüglich μ -Vereinfachung dasselbe Verhalten.

Lemma 1

Es seien $f_1, f_2, g \in \mathcal{M}(n)$ mit endlicher Milnorzahl. Dann gilt

$$f_1 \underset{K}{\sim} f_2 \quad \text{und} \quad f_1 \xrightarrow{\mu} g \quad \implies \quad f_2 \xrightarrow{\mu} g$$

Beweis:

Es existieren $e \in \mathcal{O}^*(n)$ und $\phi \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ mit $f_2 = e \cdot (f_1 \circ \phi)$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(n) &\longrightarrow \mathcal{M}(n) \\ h &\longmapsto e \cdot (h \circ \phi) \end{aligned}$$

ist ein topologischer Isomorphismus, und es gilt nach 2.4.1

$$h \underset{\mu}{\sim} e \cdot (h \circ \phi)$$

□

Warnung:

Wir werden in Kapitel III Beispiele angeben, die zeigen, daß sich μ -homotope Funktionskeime mit isolierter Singularität bezüglich μ -Vereinfachung unterschiedlich verhalten können.

Lemma 2

Es seien $f, g \in \mathcal{M}(n)$ mit endlicher Milnorzahl und $f \xrightarrow{\mu} g$.

Dann ist $\mu(g) \leq \mu(f)$, und jede Umgebung von f in $\mathcal{M}(n)$ enthält ein h mit

- (i) $h \underset{\mu}{\sim} g$
- (ii) $\tau(h) \leq \tau(f)$
 Korang $(h) \leq$ Korang (f)
 Multiplizität $(h) \leq$ Multiplizität (f)
 Modularität $(h) \leq$ Modularität (f)
 (für eine Definition der Modularität siehe 2.5)

- (iii) $f - h$ ist ein Polynom, dessen Grad höchstens $\mu(f) + 1$ ist.

Beweis:

Milnorzahl, Tjurinazahl, Korang, Multiplizität und Modularität sind auf $\mathcal{M}(n)$ halbstetig nach oben. Für genügend kleines U gilt deshalb (ii) für alle $h \in U$. Es sei nun $h' \in U$ mit $h' \sim_{\mu} g$. Wir wählen nun ein $h \in \mathcal{M}(n)$, so daß $j_{\mu(f)+1}(h) = j_{\mu(f)+1}(h')$ und $f - h$ ein Polynom mit Grad kleiner gleich $\mu(f) + 1$ ist. Es ist $h \in U$. Weil h' $(\mu(f) + 1)$ -bestimmt ist, gilt $h \sim_{\mathbb{R}} h'$ und deshalb $h \sim_{\mu} g$. □

Satz:

Es seien $f, g \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0. Ferner sei

$$F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

eine K -verselle Entfaltung von f ,

$$\bar{T}: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$$

eine K -transversale Scheibe für f . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $f \xrightarrow{\mu} g$
- (ii) Für jeden holomorphen Repräsentanten $F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ offen der Entfaltung F existiert ein $(x, s) \in U \cap F^{-1}(0)$ mit

$$F_{(x, s)}(\cdot, 0) \sim_{\mu} g.$$

- (iii) In jeder Umgebung $0 \in V \subset \mathbb{C}^r$ existiert ein $t \in V$, so daß

$$\bar{T}(t) \sim_{\mu} g$$

Beweis:

Wir bezeichnen mit $\mu := \mu(f)$ die Milnorzahl von f . Im folgenden benutzen wir, daß kontaktäquivalente Funktionskeime μ -homotop sind.

(i) \Rightarrow (ii)

Es sei $\{\psi_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ die Menge aller Monome aus $\mathcal{M}^2(n)$ mit Grad kleiner gleich $\mu+1$. Wir definieren eine Entfaltung

$$\begin{aligned} \mathcal{G}: (\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_s^m, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, s) &\longmapsto f(x) + \sum_{j=1}^m s_j \psi_j(x) \end{aligned}$$

Aus Lemma 2 folgt, daß für \mathcal{G} die Aussage (ii) gilt. Weil \bar{F} K -versell ist, existiert ein K -Morphismus

$$(u, \phi): \mathcal{G} \longrightarrow \bar{F}.$$

Für geeignete Repräsentanten gilt dann (siehe 2.1.4)

$$\bar{F}_{\phi(x,s)}(\cdot, 0) \sim_K \mathcal{G}_{(x,s)}(\cdot, 0).$$

(ii) \Rightarrow (iii)

Wir können o.B.d.A. verlangen, daß \bar{F} K -semiuniversell ist. Aus dem Satz in 2.3.2 folgt, daß (iii) für minimale K -transversale Scheiben, also erst recht für K -transversale Scheiben von f gilt.

(iii) \Rightarrow (i)

trivial.

□

2.4.3 Satz:

Es seien $f, g \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0. Ferner sei

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathcal{M}^2(n) \\ t &\longmapsto f + \sum_{j=1}^r t_j \psi_j \end{aligned}$$

eine K -transversale Scheibe für f in $\mathcal{M}^2(n)$. Genau dann μ -vereinfacht sich f in g , wenn es einen analytischen Weg

$$\gamma: (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^r, 0)$$

gibt, so daß

$$\bar{T}(\gamma(z)) \sim_{\mu} g$$

für $0 < |z|$ klein gilt.

Korollar:

Es seien $f, g \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0.
Dann gilt

$$f \xrightarrow{\mu} g \quad \text{und} \quad \mu(f) = \mu(g) \quad \implies f \sim_{\mu} g$$

Beweis:

Wir verwenden die Bezeichnungen aus 2.4.1.

Wir setzen $\mu := \mu(g)$. Es sei $\Sigma(\mu) = Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ die Zerlegung in irreduziblen Komponenten. Da die Mengen $Z_j - \Sigma(\mu+1)$ wegzusammenhängend sind, können wir o.B.d.A. verlangen

$$(i) \quad \text{für } t \in Z_1 - \Sigma(\mu+1) \text{ ist } \gamma(t) \sim_{\mu} g$$

$$(ii) \quad 0 \text{ ist Häufungspunkt von } Z_1 - \Sigma(\mu+1).$$

Wegen (ii) ist insbesondere $0 \in Z_1$.

Ist $\mu(f) = \mu(g)$, so ist $0 \notin \Sigma(\mu+1)$, also $f \sim_{\mu} g$.

Sei $\mu(f) > \mu(g)$, d.h. $0 \in \Sigma(\mu+1)$. Dann ist

$$(Z_1 \cap \Sigma(\mu+1), 0) \subsetneq (Z_1, 0)$$

und die Behauptung folgt dann aus dem folgenden Satz über analytische Mengen

Satz: (Kurvenauswahlsatz)

Es seien $(Y, 0) \subsetneq (X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ analytische Mengenkeime.
Dann existiert ein holomorpher Abbildungskeim

$$\gamma: (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (X, 0),$$

so daß $\gamma(z) \notin Y$ für $0 < |z|$ klein genug.

Beweis:

Wir können o.B.d.A. $(X, 0)$ als irreduzibel voraussetzen.

Es sei $p := \dim(X, 0)$. Dann ist $q := \dim(Y, 0) < p$.

Es existiert ein holomorpher, endlicher, surjektiver Abbildungskeim

$$\pi: (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

(siehe z.B. [Fi], chap. 3). Das Bild von $(Y, 0)$ unter π ist ein analytischer Mengenkeim der Dimension q . Deshalb existiert

eine komplexe Gerade L in \mathbb{C}^P , so daß

$$(L,0) \cap \pi(Y,0) = (\{0\},0).$$

Das Urbild $\pi^{-1}(L,0) \subset (X,0)$ zerfällt in eindimensionale Primkeime. Es sei $(L',0)$ ein solcher Primkeim sowie

$$\gamma: (\mathbb{C},0) \longrightarrow (L',0)$$

eine Normalisierung.

□

1.2.5 Modularität

2.5.1 Es sei $f \in m^2(n)$ eine isolierte Singularität mit Milnorzahl $\mu < \infty$.

$F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\mu, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sei eine R -semiuniverselle Entfaltung von f .

Die Dimension des in 2.1.3 definierten $\mu = \text{const.}$ -Stratums $(D_{F,\mu}, 0)$ hängt nicht von der gewählten R -semiuniversellen Entfaltung F ab.

Definition:

Die eigentliche Modularität von f ist

$$m(f) := \dim(D_{F,\mu}, 0).$$

Sei nun $\tau: \mathbb{C}^{\mu-1} \longrightarrow m^2(n)$ eine minimale R -transversale Scheibe von f und

$$\Sigma(\mu) := \{t \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \mu(\tau(t)) \geq \mu\}.$$

$\Sigma(\mu)$ ist nach 2.4.1 lokal-analytisch.

Satz:

Für den analytischen Mengenkeim $(\Sigma(\mu), 0)$ gilt:

$$m(f) = \dim(\Sigma(\mu), 0).$$

Beweis:

Nach 2.1.3, Satz und 2.3.2, Satz existiert ein endlicher, surjektiver, holomorpher Abbildungskeim

$$(\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \longrightarrow (D_{F,0}, 0),$$

dessen Einschränkung einen endlichen, surjektiven, holomorphen

Abbildungskeim

$$(\Sigma(\mu), 0) \longrightarrow (D_{\bar{F}, \mu}, 0)$$

induziert. □

Folgerung:

$$\mu(f) \geq \tau(f) \geq \mu(f) - m(f).$$

Beweis:

Da die Milnorzahl invariant unter Kontaktäquivalenz ist, folgt für eine minimale R -transversale Scheibe \bar{T} von f :

$$0 \in \{t \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \bar{T}(t) \sim_R f\} \subset \{t \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \bar{T}(t) \sim_K f\} \subset \Sigma(\mu).$$

Da \bar{T} auch K -transversal ist, gilt nach 2.3.1:

$$\dim(\{t \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \bar{T}(t) \sim_K f\}, 0) = (\mu-1) - (\tau-1) = \mu - \tau.$$

Wir erhalten:

$$0 \leq \mu - \tau \leq \dim(\Sigma(\mu), 0) = m(f). \quad \square$$

Sei $k \geq \mu + 1$. Die Menge

$$\Omega_k(\mu) := j_k(\{g \in \mathfrak{m}^2(n) \mid \mu(g) \geq \mu\}) \subset J_k^2(n)$$

ist dann algebraisch (vergleiche 2.4.1).

Es bezeichne $c_k(f)$ die Kodimension des analytischen Mengenkeimes $(\Omega_k(\mu), j_k(f))$ in $J_k^2(n)$.

Satz:

$$m(f) = (\mu(f) - 1) - c_k(f).$$

Beweis:

Wir verwenden die Charakterisierung der Kodimension von Remmert und Stein (vergleiche z.B. [Fo] §§ 9 und 11).

Sei $\bar{T} : \mathbb{C}^{\mu-1} \longrightarrow \mathfrak{m}^2(n)$ eine minimale R -transversale Scheibe von f und $E := (j_k \circ \bar{T})(\mathbb{C}^{\mu-1})$. Dann gilt:

$$\dim E = \mu - 1,$$

$$m(f) = \dim(\Sigma(\mu), 0) = \dim(\Omega_k(\mu) \cap E, j_k(f)).$$

Also existiert eine $((\mu-1)-m(f))$ -dimensionale Ebene $E' \subset E$, die $\Omega_k(\mu) \cap E$ in $j_k(f)$ isoliert schneidet.

Da E' natürlich auch $\Omega_k(\mu)$ in $j_k(f)$ diskret schneidet, folgt:

$$c_k(f) \geq (\mu - 1) - m(f).$$

Da andererseits $c_k(f) \leq \mu - 1$, gilt für eine hinreichend generische $c_k(f)$ -dimensionale Ebene $E' \subset J_k^2(n)$ durch $j_k(f)$:

- 1) $(E' - j_k(f)) \cap j_k(m\Delta f) = \{0\}$,
- 2) E' schneidet $\Omega_k(\mu)$ in $j_k(f)$ isoliert.

Solch eine Ebene E' ist in einer $(\mu - 1)$ -dimensionalen Ebene $E \subset J_k^2(n)$ enthalten, die das Rechtsorbit von $j_k(f)$ im Jetraum transversal schneidet.

E ist dann das Bild $(j_k \circ \bar{\tau})(\mathbb{C}^{\mu-1})$ einer minimalen R -transversalen Scheibe $\bar{\tau}$ von f .

Also folgt:

$$c_k(f) \leq (\mu - 1) - m(f).$$

□

2.5.2 Definition:

Sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ eine isolierte Singularität und

$$\bar{\tau}: \mathbb{C}^{\mu(f)-1} \longrightarrow \mathfrak{m}^2(n)$$

eine minimale R -transversale Scheibe von f .

Dann wird die Modularität von f als die größte Zahl $\lambda \in \mathbb{N}_0$ mit der folgenden Eigenschaft definiert:

In jeder genügend kleinen offenen Umgebung $0 \in V \subset \mathbb{C}^{\mu(f)-1}$ gibt es eine λ -dimensionale analytische Teilmenge X , für die gilt: Der Schnitt von $\bar{\tau}(X) \subset \mathfrak{m}^2(n)$ mit jedem Rechtsorbit ist diskret oder leer.

Theorem: (Gabrielov)

- (i) Die Modularität einer isolierten Singularität $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ stimmt mit ihrer eigentlichen Modularität überein.
- (ii) Die Modularität ist halbstetig nach oben.

Beweis: [Ga 3], § 3.

□

Bemerkung: (i) Natürlich kann man Modularität und eigentliche Modularität analog für Kontaktäquivalenz definieren. Allerdings

wäre - wie man mit den Ergebnissen aus Abschnitt I.3 folgern kann - die eigentliche K -Modularität nicht halbstetig nach oben und im allgemeinen von der K -Modularität verschieden.

(ii) Die Frage, ob die Modularität eine Invariante unter μ -Homotopie ist, scheint nicht beantwortet zu sein.

Wir kommen auf dieses Problem in I.5.2 zurück.

I.3 Arnolds Klassifikation der Singularitäten mit Modularität höchstens zwei

3.1 Theorem: (Arnold)

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ eine isolierte Singularität der Modularität höchstens zwei. Dann ist f stabil-äquivalent zu einem Funktionskeim aus genau einer Familie der Liste in Anhang A.1.

Ferner gilt:

Die Funktionskeime aus einer Familie dieser Liste haben die gleiche Milnorzahl und Modularität ≤ 2 . Dabei ist die Modularität gleich der Anzahl der Parameter der Familie.

Ein Rechtsorbit schneidet eine Familie nur diskret oder leer.

Beweis: [Ar 3]

□

Definition:

Die Menge der $f \in \mathfrak{m}^2(n)$, die stabil-äquivalent zu den Funktionskeimen aus einer gegebenen Familie aus Anhang A.1 sind, nennen wir eine Arnoldsche Klasse in $\mathfrak{m}^2(n)$ und bezeichnen sie mit dem in der Liste angegebenen Namen.

Die Familie bezeichnen wir als eine Normalform der Arnoldschen Klasse (zur allgemeinen Definition von Normalform siehe [Ar 3], § 12.1).

Satz:

Seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ isolierte Singularitäten der Modularität höchstens zwei. Dann gilt:

- (i) $f \sim_{\mu} g \iff f$ und g liegen in der gleichen Arnoldschen Klasse.
- (ii) $f \sim_{\mu} g \iff f(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 \sim_{\mu} g(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2$.

Beweis:

(i) " \Leftarrow " ist offensichtlich, da die Funktionskeime einer Familie die gleiche Milnorzahl haben und die Familien stetig sind. (ii) " \Rightarrow " ist ebenfalls klar.

Die anderen Beweisrichtungen ergeben sich aus dem Vergleich der Milnorgitter und der Eigenwerte der Monodromie (siehe 5.1). □

Folgerung:

Es seien $f, g \in m^2(n)$ isolierte Singularitäten der Modularität höchstens zwei. Dann gilt:

$$f \xrightarrow{\mu} g \iff f(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 \xrightarrow{\mu} g(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2.$$

Beweis:

" \implies ": klar.

" \impliedby ": Es sei $\bar{\tau} : \mathbb{C}^r \longrightarrow m^2(n)$ eine transversale Scheibe für f .

Dann wird durch

$$\begin{aligned} \hat{\tau} : \mathbb{C}^r &\longrightarrow m^2(n+1) \\ t &\longmapsto \bar{\tau}(t) + x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

eine transversale Scheibe für $f(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2$ definiert. In jeder Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^r$ gibt es ein t mit

$$m(\bar{\tau}(t)) \leq 2 \quad \text{und} \quad \hat{\tau}(t) \sim_{\mu} g + x_{n+1}^2.$$

Aus obigem Satz folgt:

$$\bar{\tau}(t) \sim_{\mu} g. \quad \square$$

Bemerkungen: (i) Eine μ -Klasse enthält also höchstens eine Arnoldsche Klasse. Aus zwei Bemerkungen in [Ar 3], § 12.1 und § 12.2, könnte man schließen, daß die Arnoldschen Klassen mit den entsprechenden μ -Klassen zusammenfallen. Da uns hierfür kein Beweis bekannt ist, setzen wir dies im folgenden nicht voraus (vgl. 5.1).

(ii) Arnolds Klassifikation in [Ar 3] umfaßt auch isolierte Singularitäten höherer Modularität.

3.2 Für die Normalformen aus Anhang A.1 ergibt sich die folgende Einteilung nach Korang, Multiplizität und Typ des Tangentialkegels:

Korang 0: A_1

Korang 1: A_k ($k \geq 2$)

Korang 2: Die Normalformen sind in diesem Fall Familien von Funktionskeimen in zwei Veränderlichen mit der Multiplizität $v = 3$ oder $v = 4$. Der Tangentialkegel eines Funktionskeimes dieser Familien ist also der Nullstellendivisor eines homogenen Polynoms $h \in \mathbb{C}[x, y]$ vom Grad 3 oder 4. Die Vielfachheiten der verschiedenen Linearfaktoren von h beschreiben wir durch ein Tupel natürlicher Zahlen $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ mit $k \leq 3$ bzw. $k \leq 4$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ und

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 3 \text{ bzw. } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 4.$$

Multiplizität 3:

λ	Klassen
(1,1,1)	D_4
(2,1)	D_k ($k > 4$)
(3)	$T_{2 \ 3 \ r}$ ($r \geq 6$) $E_{12}, E_{13}, E_{14}, J_{3, i}$ ($i \geq 0$), E_{18}, E_{19}, E_{20}

Multiplizität 4:

λ	Klassen
(1,1,1,1)	$T_{2 \ 4 \ 4}$
(2,1,1)	$T_{2 \ 4 \ r}$ ($r > 4$)
(3,1)	$Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{1, i}$ ($i \geq 0$), Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}
(2,2)	$T_{2 \ q \ r}$ ($q, r > 4$)
(4)	$W_{12}, W_{13}, W_{1, i}$ ($i \geq 0$), $W_{1, i}^\#$ ($i > 0$), W_{17}, W_{18}

Korang 3: Die Normalformen sind in diesem Fall Familien von Funktionskeimen in drei Veränderlichen mit der Multiplizität 3. Die Basen der Tangentialkegel sind kubische Kurven ohne mehrfache Komponenten.

Typ der Kubik		Klassen
singularitätenfreie K.	$o <$	T_{333}
irreduzible K. mit gewöhnlichem Doppelpunkt	α	$T_{33r} (r > 3)$
irreduzible K. mit Spitze	γ	$Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{2,i} (i \geq 0)$ Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}
Quadrik und Gerade in allgemeiner Lage	\emptyset	$T_{3qr} (q, r > 3)$
Quadrik mit Tangente	β	$S_{11}, S_{12}, S_{1,i} (i \geq 0),$ $S_{1,i}^{\#} (i > 0), S_{16}, S_{17}$
drei Geraden in allgemeiner Lage	\times	$T_{pqr} (p, q, r > 3)$
drei Geraden in spezieller Lage	\ast	$U_{12}, U_{1,i} (i \geq 0), U_{16}$

Satz und Definition:

Sei $f \in m^2(n)$ eine isolierte Singularität der Modularität höchstens zwei. f sei stabil-äquivalent zu $\tilde{f} \in m^3(r)$ ($r \leq n$).
Legen wir die obige Einteilung der Tangentialkegel zugrunde, so gilt:

Korank (f), $v(\tilde{f})$ und der Typ von $T(\tilde{f})$ sind Invarianten der Arnoldschen Klasse von f in $m^2(n)$.

Wir schreiben $\tilde{v}(f) := v(\tilde{f})$ und $\tilde{T}(f)$ für den Typ von $T(\tilde{f})$.

□

3.3 Satz:

- (i) Für die Normalformen aus Anhang A.1
- der einfachen Singularitäten,
 - der vierzehn exzeptionellen unimodularen Klassen,
 - der vierzehn exzeptionellen bimodularen Klassen,
 - der Klassen der parabolischen Singularitäten
 T_{236}, T_{244} und T_{333} ,
 - der bimodularen Klassen $J_{3,0}, Z_{1,0}, Q_{2,0}, W_{1,0}$
 $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$

gilt:

- Alle Funktionskeime der Familie sind semiquasihomogen von dem in der Liste aufgeführten Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$.
- (ii) Für die Normalformen aus Anhang A.1 der übrigen Klassen der uni- und bimodularen Serien mit Ausnahme der Serie $W_{1,i}^\#$ ($i > 0$) gilt:
 Alle Funktionskeime einer Familie haben das gleiche Newtonpolyeder und sind Γ -nichtentartet. \square

Bemerkung: Alle Singularitäten einer Arnoldschen Klasse $W_{1,i}^\# \in \mathfrak{m}^2(2)$ sind Γ -entartet. Denn man sieht leicht, daß ein Koordinatenwechsel $\phi \in \beta(2)$ eine Singularität der in A.1 angegebenen Normalform nur in Funktionskeime überführen kann, deren Newtonzahl nicht größer als 15 ist. Die Milnorzahl einer Singularität aus $W_{1,i}^\#$ ist aber mindestens 16.

Dagegen werden die stabil-äquivalenten Familien in $\mathfrak{m}^2(3)$

$$z^2 + (x^2 + y^3)^2 + (a_0 + a_1 y)xy^{4+j} \quad \text{für } i = 2j - 1,$$

$$z^2 + (x^2 + y^3)^2 + (a_0 + a_1 y)x^2 y^{3+j} \quad \text{für } i = 2j > 0$$

durch den Koordinatenwechsel $z \longmapsto z + \sqrt{-1}(x^2 + y^3)$

in die Familien Γ -nichtentarteter Funktionskeime

$$z^2 + 2\sqrt{-1}(x^2 + y^3)z + (a_0 + a_1 y)xy^{4+j} \quad \text{für } i = 2j - 1,$$

$$z^2 + 2\sqrt{-1}(x^2 + y^3)z + (a_0 + a_1 y)x^2 y^{3+j} \quad \text{für } i = 2j > 0$$

überführt.

3.4 Wir wollen nun die Normalformen aus Anhang A.1 bezüglich Kontaktäquivalenz beschreiben und für die verschiedenen Kontaktäquivalenztypen die Tjurinazahlen berechnen.

Dazu werden wir eine gegebene Normalform zumeist mit Hilfe

- eines quasihomogenen Polynoms f von einem geeigneten Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ und
- von Monomen ψ, ψ_0, ψ_1 mit gleichem oder höheren quasihomogenen Grad als d

beschreiben.

"grad()" bezeichne den durch die Gewichtung (w_1, \dots, w_n) definierten quasihomogenen Grad.

H bezeichne die komplexe Ebene, aus der (abhängig vom betrachteten Fall) endlich viele Punkte entfernt worden sind.

[0] Die Normalformen der Klassen der einfachen Singularitäten bestehen aus je einer einzigen quasihomogenen Singularität f . Für diese gilt:

$$\tau(f) = \mu(f).$$

[1.1.1] Die Normalformen der parabolischen Klassen $T_{2\ 3\ 6}$, $T_{2\ 4\ 4}$ und $T_{3\ 3\ 3}$ sind von der Form

$$f_a = f + a\psi, \quad a \in H, \text{ mit } \text{grad}(\psi) = \text{grad}(f).$$

Jedes f_a ist quasihomogen, also gilt:

$$\tau(f_a) = \mu(f_a) \quad \text{für } a \in H.$$

Ferner ist für jedes $\hat{a} \in H$ die Menge

$$\{a \in H \mid f_a \sim_K f_{\hat{a}}\}$$

diskret.

[1.1.2] Alle Funktionskeime aus einer Normalform der unimodularen Klassen $T_{p\ q\ r}$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

sind kontaktäquivalent. Für eine Repräsentanten g aus einer dieser Familien gilt:

$$\tau(g) = \mu(g) - 1.$$

[1.2] Die Normalformen der exzeptionellen unimodularen Klassen haben die Gestalt

$$f_a = f + a\psi, \quad a \in \mathbb{C}, \text{ mit } \text{grad}(\psi) = \sum_{i=1}^n (d - 2w_i) > d.$$

Für $a = 0$ gilt:

$$\tau(f_0) = \mu(f_0).$$

Für $a \neq 0$ ist:

$$f_a \sim_K f_1 = f + \psi \quad \text{und} \quad \tau(f_a) = \mu(f_a) - 1$$

und damit

$$f_a \not\sim_K f_0.$$

[2.1.1] Die Normalformen der bimodularen Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$ sind von der Form

$$f_{a_0, a_1} = f + a_0\psi_0 + a_1\psi_1, \quad a_0 \in H, \quad a_1 \in \mathbb{C},$$

wobei $\text{grad}(\psi_0) = \text{grad}(f)$ und

$$\text{grad}(\psi_1) = \sum_{i=1}^n (d - 2w_i) > \text{grad}(f).$$

Für $a_1 = 0$ ist f_{a_0, a_1} quasihomogen, also

$$\tau(f_{a_0, 0}) = \mu(f_{a_0, 0}) \quad (a_0 \in H).$$

Für $a_1 \neq 0$ gilt

$$f_{a_0, a_1} \sim_K f_{a_0, 1}, \quad \tau(f_{a_0, a_1}) = \mu(f_{a_0, a_1}) - 1,$$

also

$$f_{a_0, a_1} \not\sim_K f_{a_0, 0}.$$

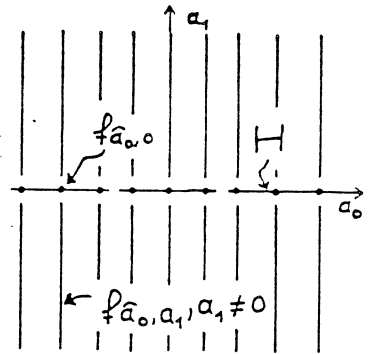
Ferner sind für jedes $\hat{a}_0 \in H$ die Mengen

$$\{a_0 \in H \mid f_{a_0, 0} \sim_K f_{\hat{a}_0, 0}\}$$

und

$$\{a_0 \in H \mid f_{a_0, 1} \sim_K f_{\hat{a}_0, 1}\}$$

diskret.



[2.1.2] Die übrigen Normalformen der bimodularen Serien sehen wie folgt aus:

$$f_{a_0, a_1} = f + (a_0 + a_1 y) \psi, \quad a_0 \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad a_1 \in \mathbb{C},$$

dabei ist $\text{grad}(\psi) > \text{grad}(f)$. f hat hier keine isolierte Singularität in 0 . Alle Funktionskeime der Familie sind kontaktäquivalent und es ist

$$\tau(f_{a_0, a_1}) = \mu(f_{a_0, a_1}) - 2.$$

[2.2] Die Normalformen der exzeptionellen bimodularen Klassen haben die Gestalt

$$f_{a_0, a_1} = f + (a_0 + a_1 y) \psi, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C},$$

mit

$$\text{grad}(\psi) = \sum_{i=1}^n (d - 2w_i) - \text{grad}(y) > \text{grad}(f).$$

Es gilt

$$\tau(f_{0, 0}) = \mu(f_{0, 0}).$$

Für $a_0 \neq 0$ ist

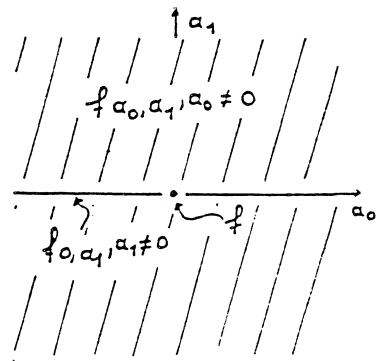
$$f_{a_0, a_1} \sim_K f_{1, 0} \quad \text{und} \quad \tau(f_{a_0, a_1}) = \mu(f_{a_0, a_1}) - 2.$$

Für $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ ist

$$f_{0, a_1} \sim_K f_{0, 1} \quad \text{und} \quad \tau(f_{0, a_1}) = \mu(f_{0, a_1}) - 1.$$

Insbesondere gilt:

$$f \not\sim_K f_{0, 1} \not\sim_K f_{1, 0} \not\sim_K f.$$



Beweis:

1) Zur Kontaktäquivalenz:

Die Singularitäten der Klasse T_{2qr} , $1/q + 1/r < 1/2$,

$$f_a = x^q + y^r + ax^2y^2, \quad a \in \mathbb{C} - \{0\},$$

sind kontaktäquivalent:

Für $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ist

$$\frac{1}{\lambda^{qr}} f_a(\lambda^r x, \lambda^q y) = x^q + y^r + a' x^2 y^2 \quad \text{mit } a' = a \cdot \lambda^{2q+2r-qr}.$$

Nach Voraussetzung ist $2q+2r-qr \neq 0$. Deshalb existiert zu vorgegebenen $a, a' \in \mathbb{C} - \{0\}$ stets ein $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ mit

$$\frac{1}{\lambda^{qr}} f_a(\lambda^r x, \lambda^q y) = f_{a'}(x, y).$$

Entsprechend zeigt man für die T_{pqr} aus [1.1.2] vom Korang 3 die Aussage über Kontaktäquivalenz.

Alle anderen Aussagen über Kontaktäquivalenz (mit Ausnahme der Diskretheit in [1.1.1] und [2.1.1]) folgen mit 1.4.2, Lemma.

2) Bestimmung der Tjurinazahlen:

Nach 2.5 haben wir die Abschätzung:

$$\mu(f) \geq \tau(f) \geq \mu(f) - m(f).$$

Der folgende Satz wurde von Wirthmüller in [Wi] bewiesen:

Satz:

Es sei f quasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit isolierter Singularität in 0 .

Sei

$$d' = \sum_{i=1}^n (d - 2w_i) > d \quad \text{und}$$

ψ ein quasihomogenes Polynom vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d')$ mit $\psi \notin \Delta f$.

Dann gilt:

$$\tau(f + t\psi) = \mu(f) - 1 \quad \text{für } t \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Beweis: Siehe [Wi] 3.3. Folgerung. Dort ist der Satz für die Hesse-Determinante H_f formuliert. Aus dem Beweis und aus Abschnitt 3.2 der Arbeit ersieht man, daß H_f in der Folgerung durch ein beliebiges Polynom ψ mit obigen Eigenschaften ersetzt werden kann.

Wählt man als ψ in den Fällen aus [1.2], [2.1.1] bzw.

[2.2] die dort mit ψ , ψ_1 bzw. $y\psi$ bezeichneten Monome, so

prüft man in jedem Einzelfalle nach, daß die Voraussetzungen obigen Satzes erfüllt sind.

(Dabei ist die folgende Regel für die Rechnungen nützlich: Sind f und ψ quasihomogen vom Grad d bzw. d' bezüglich der Gewichte $(w_1, \dots, w_n; d)$, so gilt:

$$\psi \in \Delta f \iff \psi = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ wobei die } u_i \text{ quasihomogen vom Grad } d' - d + w_i \text{ sind.}$$

In den Fällen aus [2.2] ist für $a_0 \neq 0$ zu zeigen:

$$\tau(f_{a_0, a_1}) \leq \mu(f_{a_0, a_1}) - 2.$$

Außer für S_{17} haben wir in Kapitel V für die Normalformen aus Anhang A.1 der exceptionellen bimodularen Klassen eine minimale R -transversale Scheibe $\bar{T}: T \rightarrow \mathfrak{m}^2(n)$ von $f_{0,0} = f$ berechnet, in denen die beiden Monome ψ und $y\psi$ vorkommen. Da für die Normalform von S_{17} aus Anhang A.1 gilt: $\psi, y\psi \notin \Delta f_{0,0}$, existiert nach den Ergebnissen aus IV.2.1 auch in diesem Falle eine transversale Scheibe \bar{T} mit den gewünschten Eigenschaften.

Aus der Offenheit der Versalität (siehe 2.3.1) folgt, daß \bar{T} eine R -transversale Scheibe \hat{T} für $f + \hat{a}_0\psi$, $\hat{a}_0 \neq 0$ genügend klein, definiert. Da $\mu(f + \hat{a}_0\psi) = \mu(f)$, ist die R -transversale Scheibe \hat{T} ebenfalls minimal.

Da $f_{a_0, a_1} \sim_K f_{\hat{a}_0, 0}$ für $a_0 \neq 0$, ist die Dimension des analytischen Mengenkeimes

$$(\{t \in T \mid \hat{T}(t) \sim_K f + \hat{a}_0\psi\}, 0)$$

mindestens zwei.

\hat{T} ist auch K -transversal, also folgt nach 2.3.1:

$$\tau(f + \hat{a}_0\psi) \leq \mu(f) - 2.$$

Sei $f_{1,0} = f + \psi$ eine bimodulare Seriensingularität wie in [2.1.2] und $\bar{T}: T \rightarrow \mathfrak{m}^2(n)$ eine minimale R -transversale Scheibe von $f_{1,0}$. $f_{1,0}$ hat die Modularität zwei, also ist der Mengenkeim

$$\begin{aligned} & (\{t \in T \mid \mu(\bar{T}(t)) = \mu(f_{1,0})\}, 0) \\ & = (\{t \in T \mid \bar{T}(t) \sim_{\mu} f_{1,0}\}, 0) \end{aligned}$$

zweidimensional.

Da

$$f_{a_0, a_1} \sim_K f_{1,0} \text{ für } a_0 \neq 0,$$

enthält die Arnoldsche Klasse von $f_{1,0}$ nur ein einziges

Kontaktorbit. Ist $\bar{\gamma}(t) \sim_{\mu} f_{1,0}$, so folgt für hinreichend kleines $t \in T$ aus 3.1, Satz und der Halbstetigkeit der Modularität, daß $\bar{\gamma}(t)$ in der gleichen Arnoldschen Klasse wie $f_{1,0}$ liegt und somit kontaktäquivalent zu $f_{1,0}$ ist.

Also gilt:

$$(\{t \in T \mid \bar{\gamma}(t) \sim_K f_{1,0}\}, 0) = (\{t \in T \mid \bar{\gamma}(t) \sim_{\mu} f_{1,0}\}, 0)$$

und, da $\bar{\gamma}$ K-transversal ist, nach 2.3.1:

$$\tau(f) = \mu(f) - 2.$$

Analog bestimmt man die Tjurinazahlen in den Fällen aus [1.1.2].

3) Zur Diskretheit:

Die Singularitäten der Normalformen aus [1.1.1] sind quasihomogen. Für $\hat{a} \in H$ ist daher

$$\{a \in H \mid f_a \sim_K f_{\hat{a}}\} = \{a \in H \mid f_a \sim_R f_{\hat{a}}\}.$$

Letztere Menge ist aber nach den Ergebnissen von Arnold (3.1, Theorem) diskret.

Ebenso folgt in [2.1.1] die Diskretheit der Mengen

$$\{a_0 \in H \mid f_{a_0,0} \sim_K f_{\hat{a}_0,0}\}.$$

Die Mengen

$$M_{\hat{a}_0} := \{a_0 \in H \mid f_{a_0,1} \sim_K f_{\hat{a}_0,1}\}$$

aus [2.1.1] sind diskret:

Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\hat{a}_0 \in H$ der analytische Mengenkeim $(M_{\hat{a}_0}, \hat{a}_0)$ nulldimensional ist.

Dies beweisen wir zunächst für die $\hat{a}_0 \in H$ mit

$$(*) \quad \psi_0, \psi_1 \notin \Delta f_{\hat{a}_0,0}.$$

Da $\text{grad}(\psi_0) < \text{grad}(\psi_1)$ und $\psi_0, \psi_1 \in \mathfrak{m}^2(n)$ folgt mit den Methoden aus IV.2.1: ψ_0 und ψ_1 lassen sich zu einer Basis von $\mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m} \Delta f_{\hat{a}_0,1}$

ergänzen.

Aus den Eulergleichungen (siehe 1.4.1) für $f_{\hat{a}_0,0}$ und ψ_1 folgt:

$$\psi_1 \in \mathfrak{m} \Delta f_{\hat{a}_0,1} + (f_{\hat{a}_0,1})$$

Aus dem eben zitierten Satz von Wirthmüller ergibt sich, daß die gefundene Basis von

$$m^2 / m \Delta f_{\hat{a}_0, 1}$$

eine Basis von $m^2 / m \Delta f_{\hat{a}_0, 1} + (f_{\hat{a}_0, 1})$

ergibt, wenn wir ψ_1 weglassen.

Die verbleibenden Monome definieren damit eine minimale K -transversale Scheibe $\bar{\tau}: T \rightarrow m^2(n)$ von $f_{\hat{a}_0, 1}$.

Wäre der Mengenkeim

$$(M_{\hat{a}_0}, \hat{a}_0)$$

eindimensional, so hätte auch

$$(\{t \in T \mid \bar{\tau}(t) \sim_K f_{\hat{a}_0, 1}\}, 0)$$

mindestens die Dimension eins im Widerspruch zu 2.3.1.

Man rechnet in jedem Einzelfalle nach:

Für die Normalformen aus A.1 der Klassen $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$ ist die Bedingung (*) für alle $\hat{a}_0 \in H$ erfüllt.

Für die Normalformen aus A.1 der Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$ und $Q_{2,0}$ gilt die Bedingung (*) für alle $\hat{a}_0 \in H$ außer für $\hat{a}_0 = 0$.

Da in jeder Umgebung von $0 \in H$ ein $a_0 \in H$ mit

$$f_{a_0, 1} \not\sim_K f_{0, 1}$$

liegt, sind in diesen Fällen auch die Mengenkeime $(M_0, 0)$ nulldimensional. □

I.4 Topologische Invarianten und deren Verhalten unter μ -Homotopie

I.4.1 Dynkindiagramme

4.1.1 Milnorfaser und Monodromieoperator

Wir orientieren uns hauptsächlich an den Arbeiten von Husein-Zade [H-Z] und Siersma [Si 1] .

Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ der Repräsentant eines holomorphen Abbildungskeimes $\hat{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ mit einer isolierten Singularität in $0 \in U$. Dabei sei $U \subset \mathbb{C}^n$, U offen, so klein, daß f nur in 0 einen kritischen Punkt besitzt. Milnor hat in [Mi] gezeigt:

Es existieren $\epsilon, \delta > 0$ derart, daß gilt:

- (i) $f^{-1}(t)$ schneidet den Rand ∂B_ϵ von $B_\epsilon := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| < \epsilon\}$ für alle $|t| \leq \delta$ transversal.
- (ii) $E_f := f^{-1}(\partial D_\delta) \cap \bar{B}_\epsilon$ ist eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial E_f = f^{-1}(\partial D_\delta) \cap \partial \bar{B}_\epsilon$. Dabei ist $D_\delta := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \delta\}$.
- (iii) $f|_{E_f}: E_f \rightarrow \partial D_\delta$ ist ein glattes, lokal triviales Faserbündel mit typischer Faser $X_f := f^{-1}(\delta) \cap \bar{B}_\epsilon$.

X_f heißt die Milnorfaser von f . Der Diffeomorphietyp von X_f ist unabhängig von den getroffenen Wahlen für ϵ und δ . X_f ist eine glatte, kompakte $(2n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Sie hat den Homotopietyp eines Bouquets von $\mu(f)$ Sphären S^{n-1} der Dimension $n-1$. Daher ist die $(n-1)$ -dimensionale Homologiegruppe $H_{n-1}(X_f; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\mu(f)}$ von besonderem Interesse. (Im Fall $n=1$ betrachtet man die reduzierte Homologie.)

Die Schnittform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $H_{n-1}(X_f; \mathbb{Z})$ ist eine symmetrische Bilinearform, falls n ungerade, eine schiefsymmetrische Bilinearform, falls n gerade ist.

Nach Stabilisierung von f zu $n \equiv 3(4)$ heißt das Paar

$$(H_{n-1}(X_f; \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

das Milnorgitter zu f .

Sei γ der Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow \partial D_\delta$ mit $\gamma(t) := \delta e^{2\pi i t}$.
 Da $f|_{E_f}: E_f \rightarrow \partial D_\delta$ ein lokal triviales Faserbündel, und die Einschränkung dieser Abbildung auf den Rand trivial ist, existieren stetige Familien von Diffeomorphismen $h(t)$:

$$h(t): f^{-1}(\delta) \cap \bar{B}_\epsilon \rightarrow f^{-1}(\gamma(t)) \cap \bar{B}_\epsilon \quad \text{mit } h(0) \equiv \text{id}$$

derart, daß $h(1)$ auf $f^{-1}(\delta) \cap \partial B_\epsilon$ die Identität ist. Der von $h(1)$ induzierte Isomorphismus

$$h_*: H_{n-1}(X_f; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X_f; \mathbb{Z})$$

heißt der Monodromieoperator von f .

Im folgenden schreiben wir anstelle von B_ϵ und D_δ kurz B und D und für $\gamma(1)$ kurz d .

4.1.2 Konstruktion von Morsifikationen

Es sei $F: U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ der Repräsentant einer R -versellen Entfaltung des Funktionskeims $f: (U,0) \rightarrow (\mathbb{C},0)$. Für $w \in W$ definiere $F_w(x) := F(x,w)$. Nach einem Satz von Looijenga [Lo] ist der Keim der Menge

$$\text{Bif}(F) := \{w \in W \mid F_w \text{ hat nicht } \mu(f) \text{ verschiedene kritische Werte}\}$$

in 0 analytisch. Wir können daher o.E. W so klein wählen, daß $\text{Bif}(F) \not\subseteq W$ analytisch ist.

Nach Siersma [Si1] existiert ein $\eta > 0$, so, daß für alle $|w| < \eta$ gilt:

- (i) sämtliche kritischen Punkte von F_w liegen in B
- (ii) sämtliche kritischen Werte von F_w liegen in D
- (iii) $F_w^{-1}(t)$ schneidet ∂B transversal für alle $t \in \bar{D}$

(iv) die Faserungen $E_f \rightarrow \partial D$ und $E_{F_w} \rightarrow \partial D$ sind diffeomorph.

Ist zudem $w \in W \setminus \text{Bif}(F)$, so heißt F_w eine Morsifikation von f .

4.1.3 Konstruktion verschwindender Zykkel

Wir geben nun die Konstruktion verschwindender Zykkel an, wie sie von Brieskorn [Br1] und Lamotke [Lam] durchgeführt wurde.

Es sei F_w eine Morsifikation von f . Dann hat F_w genau $\mu := \mu(f)$ verschiedene kritische Punkte (bzw. Werte), die wir mit a_1, \dots, a_μ (bzw. $c_1 := F_w(a_1), \dots, c_\mu := F_w(a_\mu)$) bezeichnen. F_w ist in den kritischen Punkten a_i ($1 \leq i \leq \mu$) nicht ausgeartet. Wir wählen nun disjunkte Kugeln \bar{B}_i um a_i in B , und disjunkte Kreisscheiben \bar{D}_i um c_i in D ($1 \leq i \leq \mu$), sodaß gilt:

$$\partial \bar{B}_i \cap F_w^{-1}(t) \quad \text{für alle } t \in \bar{D}_i$$

(Dabei sind die \bar{D}_i so klein gewählt, daß dieser Schnitt nicht leer ist). Zum weiteren wählen wir Punkte $d_i \in \partial D_i$ und stetige Wege

$$\gamma_i: [0,1] \longrightarrow \bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu} D_j \quad \text{von } d \text{ nach } d_i.$$

Diese Wege induzieren Isomorphismen in der Homologie:

$$h_{i*}: H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(F_w^{-1}(d_i) \cap \bar{B}; \mathbb{Z})$$

$Q_i := F_w^{-1}(d_i) \cap \bar{B}_i$ hat als Milnorfaser einer nicht ausgearteten A_1 -Singularität die Sphäre S^{n-1} als Deformationsretrakt.

Sei $S_i \in H_{n-1}(Q_i; \mathbb{Z})$ eine Homologieklass, welche durch S^{n-1} mit einer gewählten Orientierung repräsentiert wird.

Die Abbildungen

$$H_{n-1}(Q_i; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa^*} H_{n-1}(F_w^{-1}(d_i) \cap \bar{B}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{h_{i*}^{-1}} H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$$

($X_{F_w} := F_w^{-1}(d) \cap \bar{B}$ und $\kappa: Q_i \hookrightarrow F_w^{-1}(d_i) \cap \bar{B}$) induzieren dann eine Homologieklass Δ_i in $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$.

Diese Klassen $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ heißen verschwindende Zykkel.

Sie hängen von der Homotopieklasse der Wege γ_i und der gewählten Orientierung der S_i ab.

4.1.4 Ausgezeichnete und schwach ausgezeichnete Basen

Um Basen der Homologie $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$ aus verschwindenden Zykeln zu erhalten, benötigen wir spezielle Wege $\hat{\gamma}_i$, die sich aus den Wegen γ_i folgendermaßen konstruieren lassen: Man laufe längs γ_i von d nach d_i , umlaufe dann c_i einmal längs ∂D_i in positiver Richtung und kehre dann längs γ_i von d_i nach d zurück.

Definition:

Ein System $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ von verschwindenden Zykeln heißt ausgezeichnet, wenn gilt:

- (i) die zu (Δ_i) gehörenden Wege (γ_i) kreuzen sich nicht selbst und verschiedene Wege haben nur d als gemeinsamen Punkt
- (ii) die Wege (γ_i) und damit die entsprechenden kritischen Punkte der zugrundegelegten Morsifikation sind in der Reihenfolge, wie sie $d \in \partial D$ verlassen im Uhrzeigersinn durchnumeriert, angefangen beim Rand von D (vgl. Bild in 4.1.7).

Ein System $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ von verschwindenden Zykeln heißt schwach ausgezeichnet, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(D \setminus \{c_1, \dots, c_\mu\}, d)$ von den Homotopieklassen der zu den Zykeln (Δ_i) gehörigen Wegen $(\hat{\gamma}_i)$ erzeugt wird.

Bemerkung:

Jedes ausgezeichnete System von verschwindenden Zykeln liefert durch Entfernung der Numerierung ein schwach ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln.

Satz (Brieskorn [Br 1]):

Jedes schwach ausgezeichnete System von verschwindenden Zykeln bildet eine Basis von $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$.

Wir sprechen deshalb auch von ausgezeichneten bzw. schwach ausgezeichneten Basen der Homologie. Die Menge der so definierten ausgezeichneten Basen von $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$ bezeichnen wir mit \mathcal{L}^* .

4.1.5 Picard-Lefschetz Operatoren

Ist $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ eine schwach ausgezeichnete Basis mit zugehörigen geschlossenen Wegen $(\hat{\gamma}_i)$, so induzieren diese in der Homologie $H_*(X_{F_w}; \mathbb{Z})$ Automorphismen:

$$\tau_i: H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$$

mit
$$\tau_i(x) := x + (-1)^{n(n+1)/2} \langle x, \Delta_i \rangle \Delta_i \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

Diese Automorphismen heißen Picard-Lefschetz Operatoren. Im folgenden wollen wir für die Anzahl der Variablen von f $n \equiv 3(4)$ voraussetzen. Dann ist die Selbstschnittzahl der verschwindenden Zyklen -2 und die Picard-Lefschetz Operatoren sind Spiegelungen an $\langle \Delta_i \rangle^\perp$:

$$\tau_i(x) = x + \langle x, \Delta_i \rangle \Delta_i$$

Ist $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ eine ausgezeichnete Basis, so ist der Monodromieoperator h_* von f zu $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_\mu$ konjugiert. Das charakteristische Polynom des klassischen Monodromieoperators liefert eine Invariante der Singularität, mit welcher sich - zusammen mit der Isomorphieklasse des Milnorgitters - die hier betrachteten 0-, 1-, 2-modularen Singularitäten unterscheiden lassen (I.5).

Die Monodromiegruppe Γ der Morsifikation F_w ist das Bild des kanonischen Morphismus

$$\pi_1(D \setminus \{c_1, \dots, c_\mu\}; d) \longrightarrow \text{Aut } H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}).$$

Für eine schwach ausgezeichnete Basis $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ mit zugehörigen Picard-Lefschetz Operatoren $(\tau_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ gilt dann:

$$\Gamma = \langle \tau_1, \dots, \tau_\mu \rangle.$$

Es bezeichne Λ^* die Menge der verschwindenden Zykel in $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$. Wir definieren Operationen $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}$ auf $\Lambda^{*\mu}$ in folgender Weise:

$$\alpha_i(\Delta_1, \dots, \Delta_\mu) = (\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, \tau_i(\Delta_{i+1}), \Delta_i, \Delta_{i+2}, \dots, \Delta_\mu)$$

für $(\Delta_1, \dots, \Delta_\mu) \in \Lambda^{*\mu}$. Diese Operationen induzieren Operationen von α_i auf \mathcal{L}^* (vgl. [H-Z]).

Die von $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}$ aufgespannte Gruppe ist isomorph zur Zopfgruppe mit μ Fäden. Nach Husein-Zade [H-Z] gilt:

Satz:

Die Zopfgruppe mit μ Fäden operiert bis auf Orientierung der Zykel transitiv auf der Menge \mathcal{L}^* der ausgezeichneten Basen von $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$.

Bemerkung:

Es bezeichne wie in 4.1.4 \mathcal{L}^* die Menge der ausgezeichneten Basen von $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$. Brieskorn definiert in [Br 4] die Menge

$$\mathcal{B}^* := \{(\tau\Delta_1, \dots, \tau\Delta_\mu) \mid \tau \in \Gamma, (\Delta_1, \dots, \Delta_\mu) \in \mathcal{L}^*\}$$

als Menge der ausgezeichneten Basen von $H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z})$. Das Paar $((H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}), \mathcal{B}^*)$ ist bis auf Isomorphie durch f eindeutig bestimmt ([Br 4]).

4.1.6 Dynkindiagramme

Ist f so stabilisiert, daß die Anzahl der Variablen $n=3(4)$ ist, so gilt für den Selbstschnitt verschwindender Zykel: $\langle \Delta_i, \Delta_i \rangle = -2$ ($1 \leq i \leq \mu$) und die Schnittform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}) \times H_{n-1}(X_{F_w}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist eine symmetrische, gerade Bilinearform.

Da die Faserungen

$$f|_{E_f}: E_f \longrightarrow \partial D_\delta \quad \text{mit typischer Faser } X_f$$

und
$$F_w|_{E_{F_w}}: E_{F_w} \longrightarrow \partial D_\delta \quad \text{mit typischer Faser } X_{F_w}$$

isomorph sind, bestimmt die Schnittform auf X_{F_w} die Schnittform auf der Milnorfaser X_f . Die Monodromieoperatoren der beiden Faserungen sind zueinander konjugiert.

Definition:

- (i) Das Dynkindiagramm einer isolierten Singularität f bezüglich einer Basis von verschwindenden Zykeln (Δ_i) ist ein Graph, dessen Ecken bijektiv den Zykeln entsprechen und dessen i -te und j -te Ecke mit $|\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle|$ Kanten verbunden sind (die Kanten werden gestrichelt, falls $\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle < 0$ ist). Ist zudem $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ eine ausgezeichnete Basis aus \mathcal{L}^* , so bewerten wir die Eckpunkte des Dynkindiagramms mit der Nummer des entsprechenden Basiszykels und nennen das Dynkindiagramm ausgezeichnet.
- (ii) Die Menge der Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}^*(f)$. Wir werden im folgenden zeigen, daß $\mathcal{D}^*(f)$ unabhängig von der Wahl der Morsifikation ist.

4.1.7 Invarianz der Dynkindiagramme

Die Menge der Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen hängt zunächst von den getroffenen Wahlen für die verselle Entfaltung und für die Morsifikation ab. Es gilt aber der

Satz:

Die Menge der Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen $(\mathcal{D}^*(f))$ ist unabhängig von der gewählten Morsifikation.

Beweis:

Wir verwenden die bisher eingeführten Bezeichnungen. Es sei F eine verselle Entfaltung und $\varepsilon, \delta, \eta$ seien wie in 4.1.1, 4.1.2 gewählt. Weil $B_\eta \setminus \text{Bif}(F)$ wegzusammenhängend ist, genügt es zu zeigen:

Für alle $w_0 \in B_\eta \setminus \text{Bif}(F)$ existiert ein $\eta' > 0$, sodaß für alle

$w \in B_n$ mit $|w - w_0| < \eta'$ die Morsifikationen F_{w_0} und F_w dieselbe Menge ausgezeichneter Dynkindiagramme^o definieren.

Sei eine Morsifikation F_{w_0} gegeben. Ferner seien a_i, c_i, d_i, D_i, B_i und Wege γ_i , sowie Sphären $S_i \subset F_{w_0}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}_i$ mit einer Orientierung gegeben. Mit S_i bezeichnen wir auch die zugehörigen Homologieklassen in $H_{n-1}(F_{w_0}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}_i)$. Es sei

$$h_{\gamma_i}^{w_0}: F_{w_0}^{-1}(d) \cap \bar{B} \xrightarrow{\sim} F_{w_0}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}$$

ein vom Weg γ_i induzierter Diffeomorphismus, und $h_{i*}^{w_0}$ der entsprechende Isomorphismus auf der Homologieebene.

Mit $\Delta_i := (h_{i*}^{w_0})^{-1}(S_i)$ bezeichnen wir die verschwindenden Zykeln in $H_{n-1}(F_{w_0}^{-1}(d) \cap \bar{B}; \mathbb{Z})$. Weiter sei das Wegesystem (γ_i) so gewählt, daß $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ ein ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln ist. Wir wählen nun offene Kreisscheiben K_i um c_i derart, daß $\bar{K}_i \subset D_i$ und setzen $D' := \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{\mu} K_i$. Wir wählen ein $\eta' > 0$ so, daß für alle $w \in B_n(w_0) := \{w \mid |w - w_0| < \eta'\}$ gilt (vgl. Siersma [Si 1]):

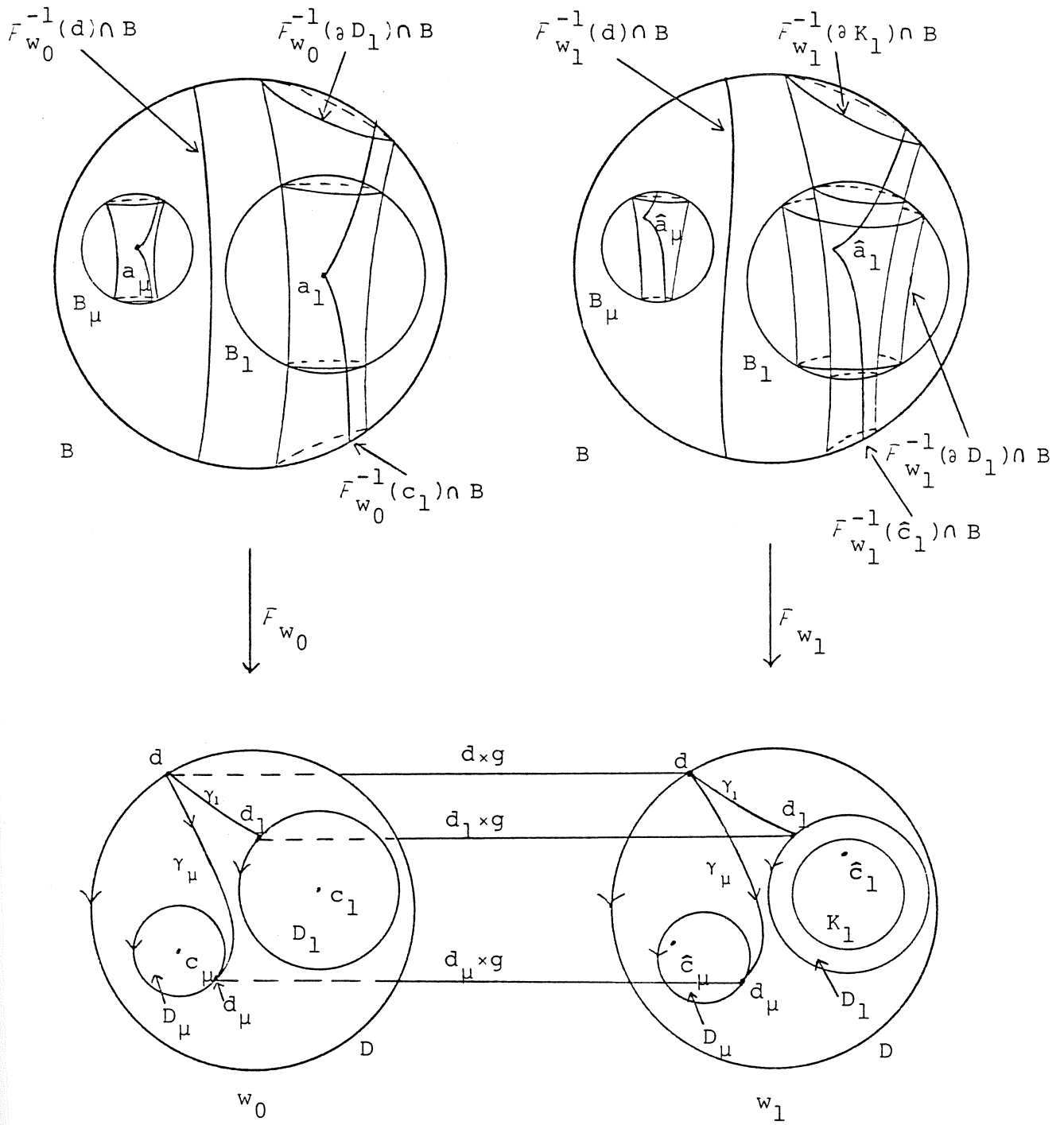
- (i) die kritischen Werte von F_w liegen in $\bigcup_{i=1}^{\mu} K_i$
- (ii) die kritischen Punkte von F_w liegen in $\bigcup_{i=1}^{\mu} (F_w^{-1}(K_i) \cap B_i)$
- (iii) In jedem B_i liegt genau ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von F_w .
- (iv) $F_w^{-1}(t) \cap \bar{B}_i$ für alle $t \in \partial D_i$ ($1 \leq i \leq \mu$). Der Schnitt sei nicht leer.

Aufgrund des Ehresmannschen Faserungssatzes ist deshalb die Abbildung

$$F \times \text{pr}_2: E \longrightarrow D' \times B_n(w_0) \text{ mit}$$

$$E := (\bar{B} \times B_n(w_0)) \cap (F \times \text{pr}_2)^{-1}(D' \times B_n(w_0))$$

ein lokal triviales, differenzierbares Faserbündel (pr_2 ist die Projektion auf den zweiten Faktor).



Die Bezeichnungen sind links $\times\{w_0\}$ und rechts $\times\{w_1\}$ zu verstehen

Es sei nun $w_1 \in B_{\eta'}(w_0)$ und g ein linearer Weg von w_0 nach w_1 . Für die Wege $\{d_i\} \times g$ in $D' \times B_{\eta'}(w_0)$ existieren dann Diffeomorphismen

$$k_i: F_{w_0}^{-1}(d_i) \cap \bar{B} \xrightarrow{\sim} F_{w_1}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}$$

Wir können η' so klein wählen, daß für alle $w_1 \in B_{\eta'}(w_0)$ $\tilde{S}_i := k_i(S_i)$ eine Sphäre in $F_{w_1}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}_i$ ist. Mit $\tilde{S}_i \in H_{n-1}(F_{w_1}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}; \mathbb{Z})$ bezeichnen wir auch die zugehörige Homologiekategorie. Die Wege $\gamma_i \times \{w_1\}$ induzieren Diffeomorphismen

$$h_{\gamma_i}^{w_1}: F_{w_1}^{-1}(d) \cap \bar{B} \xrightarrow{\sim} F_{w_1}^{-1}(d_i) \cap \bar{B}$$

und Isomorphismen $h_{i*}^{w_1}$ auf der Homologieebene. Mit

$$\tilde{\Delta}_i := (h_{i*}^{w_1})^{-1}(\tilde{S}_i) \in H_{n-1}(F_{w_1}^{-1}(d) \cap \bar{B}; \mathbb{Z})$$

ist $(\tilde{\Delta}_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ ein ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln für F_{w_1} . Die Wege

$$(\gamma_i \times \{w_0\}) \cdot (\{d_i\} \times g) \cdot (\gamma_i \times \{w_1\})^{-1} \text{ und } \{d\} \times g$$

sind in $D' \times B_{\eta'}(w_0)$ homotop als Wege mit festem Anfangspunkt (d, w_0) und festem Endpunkt (d, w_1) . ($\alpha \cdot \beta$ bedeutet hier: erst wird α , dann β durchlaufen.)

Daher stimmen die von den Diffeomorphismen

$$(h_{\gamma_i}^{w_1})^{-1} \circ k_i \circ h_{\gamma_i}^{w_0}: F_{w_0}^{-1}(d) \cap \bar{B} \xrightarrow{\sim} F_{w_1}^{-1}(d) \cap \bar{B}$$

induzierten Isomorphismen

$$(h_{i*}^{w_1})^{-1} \circ k_{i*} \circ h_{i*}^{w_0}: H_{n-1}(F_{w_0}^{-1}(d) \cap \bar{B}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(F_{w_1}^{-1}(d) \cap \bar{B}; \mathbb{Z})$$

überein. Nach Konstruktion überführt dieser Isomorphismus Δ_i in $\tilde{\Delta}_i$, sodaß gilt: $\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle = \langle \tilde{\Delta}_i, \tilde{\Delta}_j \rangle$.

Damit stimmen die entsprechenden Dynkindiagramme zu diesen Basen überein. Weil nun die Zopfgruppe transitiv auf der Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme einer Morsifikation operiert, ist der Satz bewiesen.

Lemma:

Die Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme ist unabhängig von der Wahl der versellen Entfaltung und den Wahlen für ϵ, δ und η .

Beweis:

Seien $F: V_1 \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}$, $V_1 \subset \mathbb{C}^n$ und
 $G: V_2 \times \mathbb{C}^s \longrightarrow \mathbb{C}$, $V_2 \subset \mathbb{C}^n$ Repräsentanten zweier

verseller Entfaltungen von f . Dann ist

$$H: (V_1 \cap V_2) \times \mathbb{C}^{r+s} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit}$$

$$H(x, u, w) := F(x, u) + G(x, w) - f(x) \quad \text{Repräsentant}$$

einer versellen Entfaltung von f . Da für die Bifurkationsmengen von H gilt:

$$\text{Bif}(H) \cap \mathbb{C}^r \times \{0\} = \text{Bif}(F) \quad \text{und}$$

$$\text{Bif}(H) \cap \{0\} \times \mathbb{C}^s = \text{Bif}(G) \quad \text{haben je zwei}$$

Morsifikationen von f bezüglich F bzw. G dieselbe Menge von ausgezeichneten Dynkindiagrammen, weil sich auf die Entfaltung H der letzte Satz anwenden läßt.

Die weiteren Aussagen des Lemmas folgen unmittelbar aus dem Beweis des letzten Satzes.

Lemma:

Sind $f, g \in m^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und gilt $f \sim_R g$, so ist die Menge von ausgezeichneten Dynkindiagrammen für f dieselbe wie die für g .

Beweis:

Wir wählen Repräsentanten $f: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $g: U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ und eine biholomorphe Abbildung $\phi: U_1 \longrightarrow U_2$, sodaß gilt: $f = g \circ \phi$. Weiter seien ψ_1, \dots, ψ_μ Monome derart, daß

$$G: U_2 \times \mathbb{C}^\mu \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad G(x, w) = g(x) + \sum_{i=1}^{\mu} w_i \cdot \psi_i(x)$$

eine R -verselle Entfaltung von g ist. Dann ist

$$F(x, w) := f(x) + \sum_{i=1}^{\mu} w_i \cdot (\psi_i \circ \phi)(x)$$

eine R -verselle Entfaltung von f . Zur Konstruktion einer Morsifikation von f bezüglich F (bzw. G) wähle, wie oben beschrieben, positive Zahlen $\epsilon_1, \delta_1, \eta_1$ (bzw. $\epsilon_2, \delta_2, \eta_2$) mit $\delta_1 = \delta_2, \eta_1 = \eta_2$ und $\phi(\bar{B}_{\epsilon_1}) \subset B_{\epsilon_2}$. Mittels ϕ läßt sich dann die Konstruktion eines ausgezeichneten Systems von verschwindenden Zykeln zu einer Morsifikation F_{w_0} auf die Morsifikation G_{w_0} übertragen. Wegen des letzten Lemmas ist die Menge der zugehörigen ausgezeichneten Dynkindiagramme zu f und g dieselbe.

4.1.8 Dynkindiagramme und Stabilisierung

Satz:

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(4k+3)$ eine isolierte Singularität und $g(x, y) := f(x) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ eine Stabilisierung von f . Dann ist jedes ausgezeichnete (schwach ausgezeichnete) Dynkindiagramm von f auch eines von g . Insbesondere haben f und g isomorphe Milnorgitter und die charakteristischen Polynome der Monodromieoperatoren von f und g sind dieselben.

Beweis:

Dies ist ein Spezialfall eines Resultates von Gabrielov [Gal].

4.1.9 Dynkindiagramme und μ -Homotopie

Satz:

Seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ μ -homotop. Dann haben f und g dieselbe Menge von Dynkindiagrammen zu ausgezeichneten Basen.

Korollar:

Sind $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ μ -homotope isolierte Singularitäten mit $n \equiv 3(4)$. Dann gilt:

- (i) Die Milnorgitter von f und g stimmen überein
- (ii) Die charakteristischen Polynome der Monodromieoperatoren von f und g sind dieselben.

Bemerkung: Die Aussage (i) folgt auch aus einem Satz von Tjurina [Tj], und die Aussage (ii) folgt für $n \neq 3$ auch aus einem Satz von Lê Dũng Trùng - Ramanujam [L-R].

Beweis (des Satzes): Es sei $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{m}^2(n)$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = f$, $\gamma(1) = g$ und $\mu(\gamma(t)) = \mu(f) = \mu(g)$ ($t \in [0,1]$). Da $\gamma(t)$ $(\mu+1)$ -bestimmt ist, darf man o.E. annehmen, daß $\gamma(t)$ für alle t ein Polynom mit Grad kleiner oder gleich $\mu+1$ ist. Es sei

$$\bar{F}(x,w) := f + \sum_{i=1}^N w_i \cdot \psi_i$$

eine Entfaltung von f , wobei $(\psi_i)_{1 \leq i \leq N}$ alle Monome mit $1 \leq \text{grad}(\psi_i) \leq \mu+1$ sind. Dann ist \bar{F} nach 2.1.1 eine verselle Entfaltung von $f = \gamma(0)$, weil nach dem Korollar in 1.2.1 $\mathbb{m}^\mu \subset \Delta f$ ist. Deshalb existiert ein t_0 so, daß für $0 \leq t < t_0$ eine gemeinsame Morsifikation \bar{F}_{w_0} von $\gamma(t)$ und f gewählt werden kann. Eine entsprechende w_0 Argumentation gilt für geeignete Umgebungen aller Punkte in $[0,1]$. Da man auf diese Weise eine Überdeckung des Einheitsintervalls erhält, folgt der Satz.

4.1.10 Dynkindiagramme und μ -Vereinfachung

Definition:

Es sei ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm mit den numerierten Basiszykeln $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ gegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_0 \leq \mu$. Dann heißt der bewertete Teilgraph $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq n_0}$, dessen Eckpunkte dieselbe Bewertung haben wie im gegebenen Dynkindiagramm, ein ausgezeichnetes Unterdiagramm des gegebenen Dynkindiagramms.

Nach 4.1.9 ist die Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme eine Invariante unter μ -Homotopie. Deshalb gilt der Satz:

Satz (siehe D. Siersma [Si 1]):

Es seien $f, g \in m^2(n)$ isolierte Singularitäten mit $n \equiv 3(4)$. Gilt $f \xrightarrow{\mu} g$, so gibt es zu jedem ausgezeichneten Dynkindiagramm von g ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm von f , in welchem es ein ausgezeichnetes Unterdiagramm ist.

Korollar (vgl. G.N. Tjurina, [Tj 1]):

Es seien f, g wie im Satz. Dann läßt sich das Milnorgitter von g primitiv in das Milnorgitter von f einbetten.

4.1.11 Dynkindiagramme von uni- und bimodularen Singularitäten

Satz (Gabrielov [Ga 2], Ebeling [Eb 2], [Eb 3])

Die folgenden Graphen sind ausgezeichnete Dynkindiagramme von uni- und bimodularen Singularitäten:

- (i) Die unimodularen exzeptionellen Singularitäten S_{pqr} haben ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm mit Graph S_{pqr} (Abb.1). Dabei ist die Bedeutung der Bezeichnung S_{pqr} in der Notation von Arnold der untenstehenden Tabelle 1 zu entnehmen.
- (ii) Die unimodularen Serien T_{pqr} haben ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm mit Graph T_{pqr} , der aus dem in Abb.1 angegebenen Graphen S_{pqr} entsteht, indem die mit "1" bewertete Ecke und die Verbindungskante zur Ecke " $p+q+r-1$ " entfernt werden und die Bewertung jedes Punktes um Eins erniedrigt wird.
- (iii) Alle bimodularen Singularitäten haben ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm mit Graph $R_{abcde}^{\kappa \lambda}$ (Abb.2) und der dort angegebenen Bewertung. Die Werte für $\kappa, \lambda, a, b, c, d, e$ findet man in der nachfolgend aufgeführten Tabelle 2, welche der Arbeit [Eb 3] entnommen ist.

Zusatz zu (iii):

- a) Die Werte von d und e in der Tabelle 2 können vertauscht werden.
- b) Ist $\kappa = d = e = 1, \lambda = 0$, so sind alle Werte $b', c' \geq 2$ mit $b' + c' = b + c$ möglich.

Bemerkung:

Aus den im Satz aufgeführten Dynkindiagrammen zu ausgezeichneten Basen erhält man für die bimodularen Singularitäten Dynkindiagramme zu schwach ausgezeichneten Basen, indem man die Verbindungskante von Ecke "1" zu Ecke "2" entfernt und dann die Bewertung fortläßt.

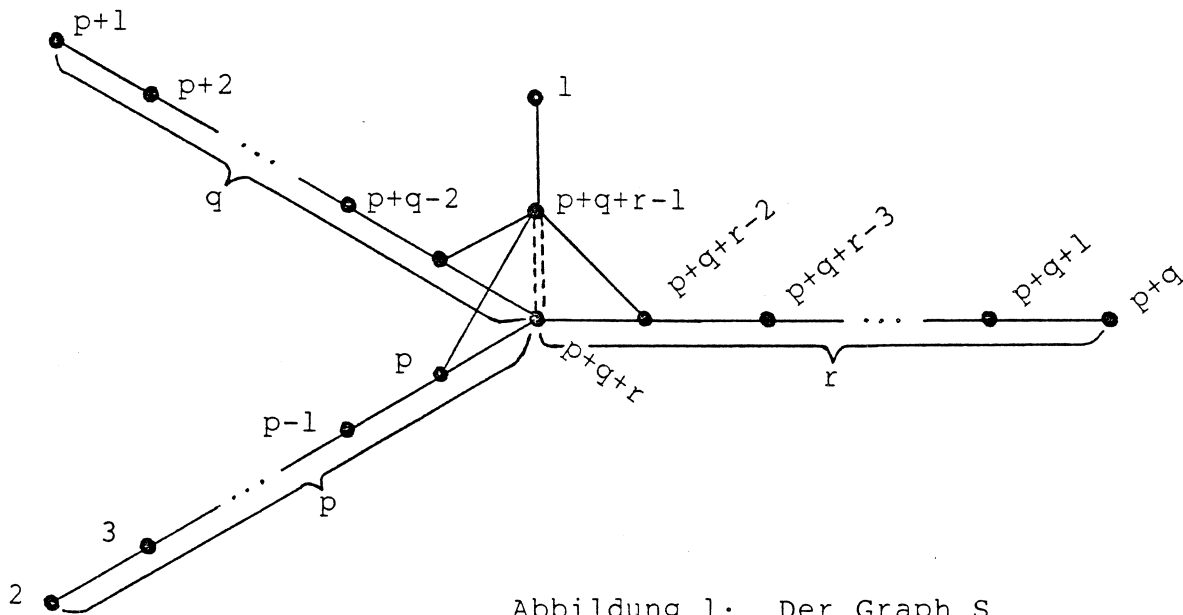


Abbildung 1: Der Graph S_{pqr}

$E_{12} = S_{2\ 3\ 7}$	$Z_{11} = S_{2\ 4\ 5}$	$W_{12} = S_{2\ 5\ 5}$
$E_{13} = S_{2\ 3\ 8}$	$Z_{12} = S_{2\ 4\ 6}$	$W_{13} = S_{2\ 5\ 6}$
$E_{14} = S_{2\ 3\ 9}$	$Z_{13} = S_{2\ 4\ 7}$	
$Q_{10} = S_{3\ 3\ 4}$	$S_{11} = S_{3\ 4\ 4}$	$U_{12} = S_{4\ 4\ 4}$
$Q_{11} = S_{3\ 3\ 5}$	$S_{12} = S_{3\ 4\ 5}$	
$Q_{12} = S_{3\ 3\ 6}$		

Tabelle 1: S_{pqr} in der Notation von Arnold

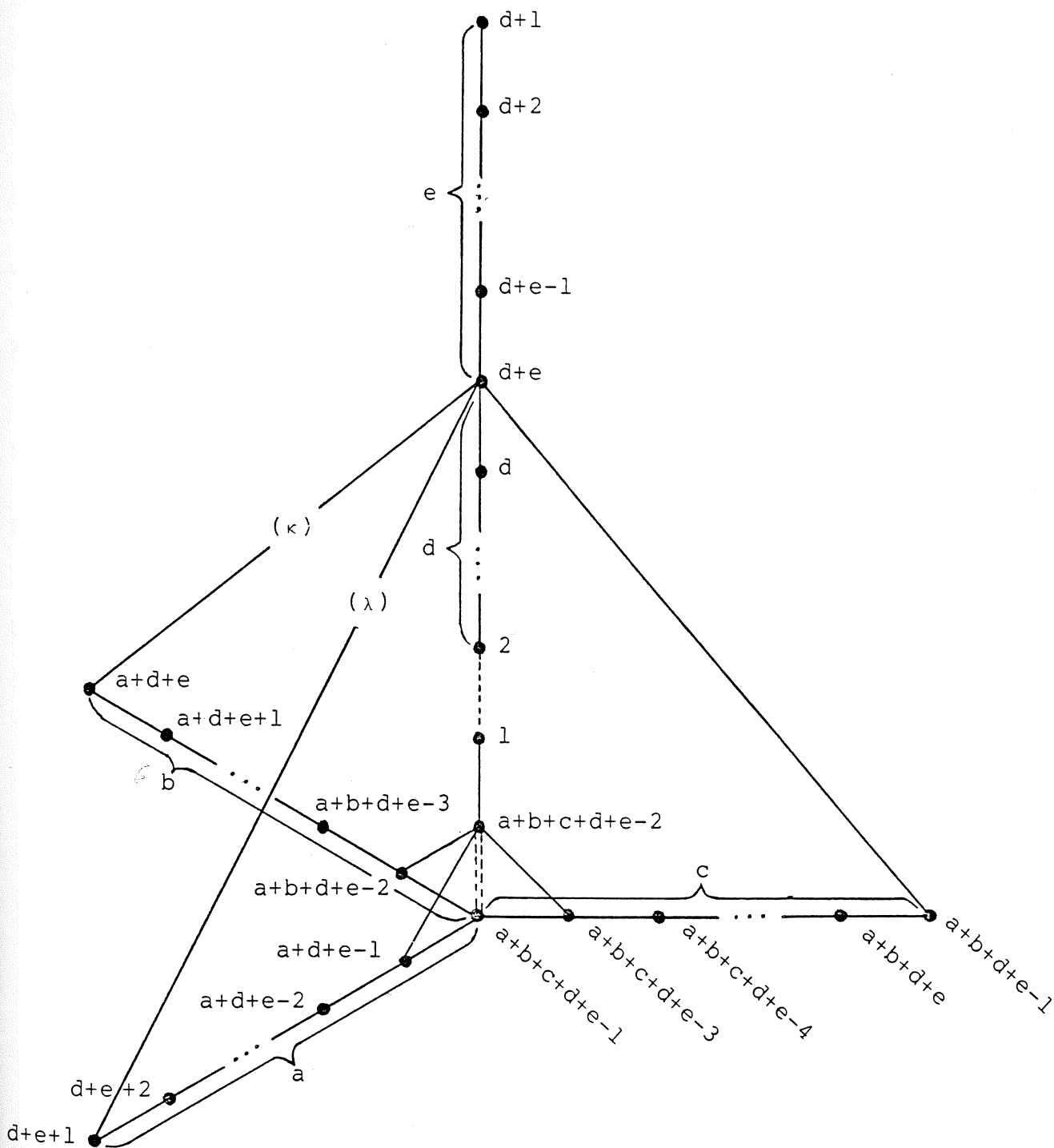


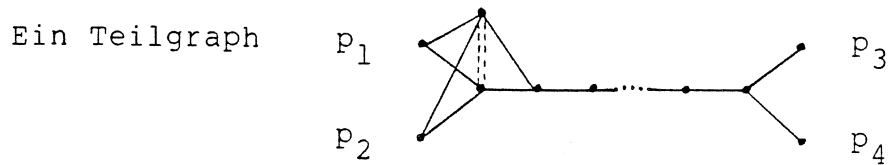
Abbildung 2: Der Graph $R_{abcde}^{\kappa\lambda}$

Singularität	κ	λ	a	b	c	d	e	Sing.	κ	λ	a	b	c	d	e
$J_{3,i}$ ($i \geq 0$)	0	0	2	3	$8+i$	2	2	E_{18}	0	0	2	3	9	2	3
	0	0	2	3	8	$2+i$	2		0	0	2	3	8	3	3
$Z_{1,i}$ ($i \geq 0$)	0	0	2	4	$6+i$	2	2	E_{19}	0	0	2	3	10	2	3
	0	0	2	4	6	$2+i$	2		0	0	2	3	9	2	4
	0	0	2	3	8	3	4		0	0	2	3	8	3	4
$Q_{2,i}$ ($i \geq 0$)	0	0	3	3	$5+i$	2	2	E_{20}	0	0	2	3	11	2	3
	0	0	3	3	5	$2+i$	2		0	0	2	3	9	2	5
$W_{1,i}$ ($i \geq 0$)	0	0	2	5	$5+i$	2	2	Z_{17}	0	0	2	4	7	2	3
	1	0	2	6	6	$1+i$	1		0	0	2	4	6	3	3
$W_{1,i}^{\#}$ ($i > 0$) $i=j+k-8$	0	0	2	5	5	$2+i$	2	Z_{18}	0	0	2	4	8	2	3
	1	0	2	$2+j$	$2+k$	1	1		0	0	2	4	7	2	4
	1	0	2	5	7	$1+i$	1		0	0	2	4	6	3	4
$S_{1,i}$ ($i \geq 0$)	0	0	3	4	$4+i$	2	2	Z_{19}	0	0	2	4	9	2	3
	1	0	3	5	5	$1+i$	1		0	0	2	4	7	2	5
	0	0	2	4	6	3	5		0	0	2	4	6	3	5
$S_{1,i}^{\#}$ ($i > 0$) $i=j+k-6$	0	0	3	4	4	$2+i$	2	Q_{16}	0	0	3	3	6	2	3
	1	0	3	$2+j$	$2+k$	1	1		0	0	3	3	5	3	3
	1	0	3	4	6	$1+i$	1		0	0	3	3	7	2	3
$U_{1,i}$ ($i \geq 0$) $i=j+k-5$	1	0	4	$2+j$	$2+k$	1	1	Q_{17}	0	0	3	3	6	2	4
	1	0	4	4	5	$1+i$	1		0	0	3	3	5	3	4
	0	0	3	3	8	2	3		0	0	3	3	5	3	4
$U_{1,1}$	1	1	4	5	5	1	1	Q_{18}	0	0	3	3	6	2	5
	0	0	3	3	6	2	5		0	0	3	3	5	3	5
	0	0	3	3	5	3	5		0	0	3	3	5	3	5
W_{17}	0	0	2	5	6	2	3	W_{17}	0	0	2	5	6	2	3
	1	0	2	6	7	1	2		1	0	2	6	7	1	2
W_{18}	0	0	2	5	7	2	3	W_{18}	0	0	2	5	7	2	3
	1	0	2	7	7	1	2		1	0	2	7	7	1	2
	1	0	2	6	7	1	3		1	0	2	6	7	1	3
S_{16}	0	0	3	4	5	2	3	S_{16}	0	0	3	4	5	2	3
	1	0	3	5	6	1	2		1	0	3	5	6	1	2
S_{17}	0	0	3	4	6	2	3	S_{17}	0	0	3	4	6	2	3
	1	0	3	6	6	1	2		1	0	3	6	6	1	2
	1	0	3	5	6	1	3		1	0	3	5	6	1	3
U_{16}	1	0	4	5	5	1	2	U_{16}	1	0	4	5	5	1	2
	1	1	5	5	5	1	1		1	1	5	5	5	1	1

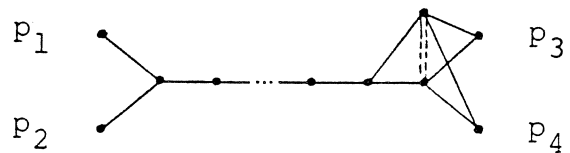
Tabelle 2

Definition:

- (i) Sei $Y \subset \mathcal{M}^2(3)$ eine uni- oder bimodulare Singularitätenklasse im Sinne von Arnold. Dieser ordnen wir die Menge $\mathcal{D}(Y)$ der ausgezeichneten Dynkindiagramme zu, die im Satz unter (i), (ii) oder (iii) mit Zusatz für Y definiert sind.
- (ii) Ferner definieren wir Mengen $\mathcal{D}_s(Y)$ schwach ausgezeichneter Dynkindiagramme wie folgt: Ist Y eine unimodulare Singularitätenklasse, so entsteht $\mathcal{D}_s(Y)$ aus $\mathcal{D}(Y)$ durch Fortlassen der Numerierung. Ist Y eine bimodulare Klasse, so besteht $\mathcal{D}_s(Y)$ aus den in der Bemerkung beschriebenen Diagrammen, wobei wir noch folgende Änderung der Graphen zulassen:



(p_i paarweise verschieden) kann durch den Teilgraphen



ersetzt werden. Die dadurch zusätzlich erhaltenen Graphen sind ebenfalls schwach ausgezeichnete Dynkindiagramme (vgl. [Eb 3], Abb. 2).

I.4.2 Spektren und eine Vermutung von Arnold

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ der Keim einer holomorphen Funktion mit isolierter Singularität in 0. Wir betrachten im Sinne von Steenbrink [St 1] die gemischte Hodge-Struktur auf der Kohomologiegruppe einer Milnorfaser dieser Singularität. Dadurch sind gewisse komplexe Vektorräume $H^{p,q}$ definiert, auf denen der Monodromieoperator operiert. Jedem Eigenwert λ der Operation des Monodromieoperators auf $H^{p,q}$ entspricht eine rationale Zahl ϱ derart, daß $\exp(2\pi i \varrho) = \lambda$ und $q = [\varrho]$ der ganze Teil von ϱ ist. Der Vektor

$$\text{Spec}(f) := (\varrho_r)_{1 \leq r \leq \mu(f)},$$

geordnet nach der Größe, heißt das Spektrum von f . Varchenko definiert für isolierte Hyperflächensingularitäten das Spektrum einer Singularität mit asymptotischen gemischten Hodge-Strukturen [Va 1]. Nach einer Bemerkung in [Va 2] erhält man das Spektrum im oben definierten Sinne, indem man die Zahlen um Eins vergrößert. Varchenko hat in [Va 1] gezeigt:

Satz:

Das Spektrum einer isolierten Singularität ist eine Invariante unter μ -Homotopie.

In Tabelle A.8 findet man für $n=3$ die Spektren aller 0-, 1- und 2-modularen Singularitäten. Dabei ist $\varrho_r = L_r / N$, wobei N und L_r der Tabelle zu entnehmen sind. Die Spektren sind bezüglich des Punktes $3/2$ symmetrisch. Die in der Tabelle angegebenen Spektren sind einer Arbeit von Gorjunov [Go] entnommen.

Für Singularitäten mit quasihomogenem Typ lassen sich die Spektren nach Steenbrink [St 2] aus der quasihomogenen Gewichtung berechnen. Für $\mu(f) \leq 20$ haben wir die Werte $\exp(2\pi i \varrho_r)$ an Hand der von uns berechneten Eigenwerte des Monodromieoperators kontrolliert. Für die Berechnung der Eigenwerte haben wir Methoden verwendet, wie sie in [A'C] und in [Eb 1] angegeben sind.

Definition:

Es seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und Milnorzahlen $\mu + d$ bzw. μ . Sei $(\ell'_r)_{1 \leq r \leq \mu+d}$ das Spektrum von f und $(\ell_r)_{1 \leq r \leq \mu}$ das Spektrum von g . Wir sagen: Das Spektrum von f vereinfacht sich in das Spektrum von g , wenn für alle $1 \leq j \leq \mu$ gilt: $\ell'_j \leq \ell_j \leq \ell'_{j+d}$. Wir schreiben dann:

$$\text{Spec}(f) \longrightarrow \text{Spec}(g)$$

Arnold hat in [Ar 4] folgende Vermutung aufgestellt:

Vermutung:

Sind $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ Funktionskeime mit isolierter Singularität in 0 und gilt $f \xrightarrow{\mu} g$, so gilt

$$\text{Spec}(f) \longrightarrow \text{Spec}(g).$$

Die Vermutung ist von Gorjunov mit Hilfe der folgenden Vereinfachungen $f \longrightarrow g$ überprüft worden:

- (i)) f, g einfache Singularitäten
- (ii) f, g unimodulare Singularitäten
- (iii) f, g bimodulare, exzeptionelle Singularitäten
- (iv) f, g bimodulare Singularitäten mit $\text{Korang}(f) = \text{Korang}(g) = 2$.

I.4.3 Auflösung von Singularitäten und deren Invarianten unter μ -Homotopie

4.3.1 Ebene Kurvensingularitäten

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(2)$ ein holomorpher Funktionskeim mit isolierter Singularität in 0. Wir betrachten den zugehörigen analytischen Mengenkeim $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$. Diesem kann man durch endlich viele sukzessive σ -Prozesse des $(\mathbb{C}^2, 0)$ eine Standardauflösung zuordnen. Zu jeder solchen Standardauflösung gibt es ein System von Multiplizitätensequenzen, auf welches wir in IV.3 näher eingehen werden. Der folgende Satz geht auf Resultate von Zariski, Lê Dũng Trùng, Ramanujam [L-R] und Tessier zurück. Wir haben ihn der Arbeit [Te 2] entnommen.

Satz:

Es seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(2)$ holomorphe Funktionskeime mit isolierter Singularität in 0. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f und g sind μ -homotop,
- (ii) $(f^{-1}(0), 0)$ und $(g^{-1}(0), 0)$ haben als in $(\mathbb{C}^2, 0)$ eingebettete Mengenkeime denselben topologischen Typ,
- (iii) die zu f und g gehörenden Systeme der Multiplizitätensequenzen sind gleich.

In Tabelle A.7 haben wir die Systeme von Multiplizitätensequenzen für sämtliche Singularitäten aus Arnolds Klassifikation mit Modularität höchstens zwei angegeben. Weil die Modularität auf den μ -Klassen von isolierten Kurvensingularitäten konstant ist (Beweis in I.5.2.1) und Arnold sämtliche ebenen Kurvensingularitäten mit Modularität 0, 1 und 2 klassifiziert hat, erhalten wir die

Folgerung:

Es seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(2)$ isolierte Singularitäten und f habe eine Modularität kleiner oder gleich zwei. g gehört genau dann zur gleichen Singularitätenklasse aus Arnolds Klassifikation wie f , wenn f und g dieselben Systeme von Multiplizitätensequenzen besitzen.

4.3.2 Zweidimensionale Hyperflächensingularitäten

Es sei $f \in \mathfrak{m}^2(3)$ mit isolierter Singularität in O . Der analytische Mengenkeim $(f^{-1}(O), O) \subset (\mathbb{C}^3, O)$ ist dann eine normale Flächensingularität. Für jede normale isolierte Flächensingularität (V, O) existiert eine Auflösung

$$\pi : (X, O) \longrightarrow (V, O).$$

Die Auflösung heißt gute Auflösung, wenn die irreduziblen Komponenten der exzeptionellen Kurve $\pi^{-1}(O)$ komplexe Mannigfaltigkeiten sind und die irreduziblen Komponenten nur normale Überkreuzungen aufweisen. Die Auflösungen sind nicht eindeutig bestimmt, aber nach Laufer [Lau 1] gilt: Jede Flächensingularität besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte minimale (bzw. minimale gute) Auflösung.

Jeder minimalen guten Auflösung läßt sich ein dualer Graph in folgender Weise zuordnen:

Jeder Eckpunkt repräsentiert eine irreduzible Komponente der exzeptionellen Kurve $\pi^{-1}(O)$. Er wird bewertet mit der Selbstschnittzahl dieser Komponente als kanonisch orientierte komplexe Untermannigfaltigkeit von X und mit dem Geschlecht. Die Anzahl der Kanten, die zwei Eckpunkte miteinander verbinden, ist gleich der Schnittzahl der zugehörigen Komponenten.

Die dualen Graphen der uni- und bimodularen Hyperflächensingularitäten findet man in den Arbeiten [Lau 2] und [Lau 3] von Laufer.

Satz (Neumann):

Für μ -homotope Singularitäten in $m^2(3)$ haben die minimalen guten Auflösungen der zugehörigen Flächensingularitäten denselben dualen Graphen.

Beweis: Aus dem Beweis in I.4.1 folgt, daß μ -homotope Singularitäten diffeomorphe Milnorfasern haben. Nach einem Satz von Neumann [Ne] bestimmt aber der Rand der Milnorfaser den dualen Graphen einer minimalen guten Auflösung.

Bemerkung:

Es gibt verschiedene isolierte Hyperflächensingularitäten mit gleichem dualen Graph, die durch nicht μ -homotope Funktionskeime definiert sind. Das folgende Beispiel stammt von Laufer und ist der Arbeit [Eb 3] von Ebeling entnommen:

$$f(x,y,z) := z^3 + x^4 + y^{36}$$
$$g(x,y,z) := z^2 + y(x^{12} + y^{18})$$

Der duale Graph ist:

$$\begin{array}{ccc} [3] & [0] & [0] \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & -2 & -2 \end{array}$$

Die Zahl in der eckigen Klammer gibt das Geschlecht, die andere die Selbstschnittzahl des zugehörigen Zyklus an. Die Ordnung des Monodromieoperators von f bzw. g ist 36 bzw. 38.

I.5 Arnoldsche Klassen und μ -Homotopie

In 5.1 werden wir einen Beweis für den Satz aus 3.1 geben. In 5.2 beschäftigen wir uns mit der Frage, ob die Modularität auf den μ -Klassen von Funktionen mit isolierter Singularität konstant ist.

5.1 Nachtrag eines Beweises

Satz:

Es seien $f, g \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und Modularität höchstens zwei. Dann gilt

(i) $f \sim_{\mu} g \iff f$ und g liegen in der gleichen Arnoldschen Klasse

(ii) $f(x_1, \dots, x_n) \sim_{\mu} g(x_1, \dots, x_n) \iff$
 $f(x_1, \dots, x_n) + y^2 \sim_{\mu} g(x_1, \dots, x_n) + y^2$

Beweis:

Die Aussagen (i) " \Leftarrow " und (ii) " \Rightarrow " sind klar. Die übrigen Aussagen werden durch eine Betrachtung von Invarianten bewiesen.

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0 und $n \equiv 3(4)$. Einem solchen f können wir gemäß 4.1.9 das charakteristische Polynom P_f des Monodromieoperators sowie die Isomorphieklasse $L(f)$ des Milnorgitters zuordnen. Diese Invarianten hängen lediglich von der μ -Klasse von f ab. Wir werden zeigen:

Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^2(3)$ Funktionskeime aus voneinander ver-
(*) schiedenen Arnoldschen Klassen, so lassen sich f_1 und f_2 an Hand der oben definierten Invarianten unterscheiden.

Die Funktionen aus den von uns betrachteten Arnoldschen Klassen haben den Korang 0, 1 oder 2.

Für eine isolierte Singularität $g \in \mathcal{M}^2(4k+3)$ und ihre Stabilisierung $h = g + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ gilt nach 4.1.8 und 4.1.9

$$L(h) = L(g) \quad \text{und} \quad P_h = P_g$$

Deshalb folgen die übrigen Behauptungen des Satzes aus (*) und (ii) "=>".

Beweis von (*):

Das Milnorgitter einer isolierten Singularität $f \in \mathcal{M}^2(3)$ ist ein gerades Gitter. Wir bezeichnen mit (μ_+, μ_-, μ_0) seine Signatur. Im folgenden benutzen wir die im Anhang A.6 aufgeführten Signaturen und Diskriminantenformen. Dies sind Invarianten des Milnorgitters (vgl. IV.1).

Es lassen sich vier Fälle unterscheiden:

(i) $\mu_0 = \mu_+ = 0$

Es liegt eine einfache Singularität vor. Für verschiedene Arnoldsche Klassen sind die Diskriminantenformen nicht isomorph.

(ii) $\mu_+ = 0, \mu_0 = 2$

Es liegt eine der drei Klassen $T_{333}, T_{244}, T_{236}$ vor. Ihre Milnorzahlen sind verschieden.

(iii) $\mu_+ = \mu_0 = 1$

f ist dann Element einer Klasse T_{pqr} mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

Das charakteristische Polynom ist dann

$$(z-1)^{-1}(z^p-1)(z^q-1)(z^r-1)$$

(siehe z.B. [H-Z], Appendix)

(iv) $\mu_+ = 2, \mu_0 = 0$

Dies sind die übrigen Klassen aus Arnolds Liste mit Modularität höchstens zwei. Unter ihnen gibt es genau fünf Paare von Klassen, deren Milnorgitter gleiche Signatur und isomorphe Diskriminantenform haben.

Es sind dies

$$\begin{array}{lll} (E_{18}, Q_{18}) & (Z_{17}, Q_{17}) & (Z_{18}, J_{3,2}) \\ (E_{19}, Z_{19}) & (S_{17}, W_{1,2}) & \end{array}$$

In diesen Fällen sind nach einem Resultat aus der Theorie der quadratischen Formen die zugehörigen Milnorgitter isomorph. Die charakteristischen

Polynome sind aber verschieden. Dies erkennt man an den Eigenwerten des Monodromieoperators, die sich aus den im Anhang A.8 angegebenen Spektren ablesen lassen. □

I.5.2 Modularität und μ -Homotopie

5.2.1 Es ist unseres Wissens nicht bekannt, ob für isolierte Singularitäten $f \in \mathcal{M}^2(n)$ die Modularität eine Invariante unter μ -Homotopie ist. Für Funktionskeime aus $\mathcal{M}^2(1)$ ist dies natürlich richtig, da sie alle 0-modular sind. Wir geben eine zu diesem Problem äquivalente Fragestellung an. Hierzu erinnern wir zunächst an einige Bezeichnungen aus 2.1 und 2.2.

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität in 0.

$$F: (\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_s^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

sei eine Entfaltung von f . Wir wählen einen Repräsentanten $\bar{F}: U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ offen.

Mit $C_{\bar{F}}$ haben wir die Menge der Punkte $(x^\circ, s^\circ) \in U$ bezeichnet, für die $\bar{F}(\cdot, s^\circ)$ in x° einen kritischen Punkt mit kritischem Wert 0 hat. $D_{\bar{F}}$ ist das Bild von $C_{\bar{F}}$ unter der kanonischen Projektion

$$\pi_{\bar{F}}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

$D_{\bar{F}, \mu}$ ist die Menge derjenigen Parameterwerte $s^\circ \in D_{\bar{F}}$, für die $\bar{F}(\cdot, s^\circ)$ einen kritischen Punkt x° mit Milnorzahl $\mu(f)$ und kritischem Wert 0 besitzt.

Man kann U stets so wählen, daß gilt:

$$\begin{array}{ll}
 C_{\bar{F}} \subset U & \text{analytisch} \\
 (*) \quad D_{\bar{F}}, D_{\bar{F}, \mu} \subset \pi_{\bar{F}}(U) & \text{analytisch} \\
 \pi_{\bar{F}}|_{C_{\bar{F}}} \longrightarrow D_{\bar{F}} & \text{ist eigentlich und hat diskrete Fasern} \\
 \bar{F}^{-1}(\cdot, s^\circ) \cap C_{\bar{F}} & \text{ist einelementig für } s^\circ \in D_{\bar{F}, \mu}
 \end{array}$$

Für eine R -semiuniverselle Entfaltung \bar{F} ist die Dimension des analytischen Mengenkeimes $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$ gerade die Modularität von f .

Satz:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) Die Modularität ist auf den μ -Klassen von Funktionskeimen aus $\mathcal{M}^2(n)$ mit isolierter Singularität konstant.
- (ii) Für jedes $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit endlicher Milnorzahl und jede R -semiuniverselle Entfaltung F ist $(D_{F, \mu}, 0)$ reindimensional.

Beweis:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$, $\bar{F}: U \rightarrow C$ Repräsentant einer R -semiuniversellen Entfaltung von f mit den Eigenschaften (*). Wir können o.B.d.A. annehmen, daß für $(x^0, s^0) \in U \cap \bar{F}^{-1}(0)$ die induzierte Entfaltung $\bar{F}_{(x^0, s^0)}$ versell ist (Offenheit der Versalität, 2.1.2).

Ist $(x^0, s^0) \in U \cap \bar{F}^{-1}(0)$ mit $\mu(\bar{F}_{(x^0, s^0)}(\cdot, 0)) = \mu(f)$, so gilt für die R -semiuniverselle Entfaltung

$$\begin{aligned} G &:= \bar{F}_{(x^0, s^0)} \\ (**) \quad (D_{G, \mu}, 0) &= (D_{\bar{F}, \mu}, s^0). \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i)

Ist der Keim $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$ reindimensional, so können wir o.B.d.A. $D_{\bar{F}, \mu} \subset \pi_{\bar{F}}(U)$ als reindimensional voraussetzen. Auf Grund der Endlich - Bestimmtheit isolierter Singularitäten und der Definition von Versalität existiert eine Umgebung W von f in $\mathcal{M}^2(n)$ mit der Eigenschaft

Zu jedem $g \in W$ ex. ein $(x^0, s^0) \in C_{\bar{F}}$ mit $g \sim_R \bar{F}_{(x^0, s^0)}(\cdot, 0)$

Wegen (***) ist deshalb die Modularität auf den μ -Klassen isolierter Singularitäten lokal konstant. Die μ -Klassen sind wegzusammenhängend.

(i) \Rightarrow (ii)

Ist der Keim $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$ nicht reindimensional, so wähle man eine niederdimensionale irreduzible Komponente von $(D_{\bar{F}, \mu}, 0)$. Aus (***) folgt dann, daß die Modularität auf der μ -Klasse von f nicht konstant ist. □

Der folgende Satz geht auf J. Wahl und B. Tossier [Te 1], [Te 2] zurück und benutzt Resultate für die Monodromie, wie sie von Lê, Lazzeri und Gabrielov bewiesen wurden.

Satz:

Für eine K -semiuniverselle Entfaltung \mathcal{G} einer isolierten Singularität $f \in \mathcal{M}^2(2)$ ist das $\mu = \text{konst.}$ Stratum $(D_{\mathcal{G}, \mu}, 0)$ glatt.

Die Glattheit des $\mu = \text{konst.}$ Stratum einer K -semiuniversellen Entfaltung einer isolierten Singularität $f \in \mathcal{M}^2(n)$ mit $n \geq 3$ scheint bis jetzt ein offenes Problem zu sein. Es wurde von B. Tossier in [Te 1] gestellt.

Beachtet man, daß für eine K -semiuniverselle Entfaltung \mathcal{G} und eine R -semiuniverselle Entfaltung \bar{F} einer isolierten Singularität f mit Milnorzahl μ und Tjurinazahl τ gilt

$$(D_{\bar{F}, \mu}, 0) \approx (D_{\mathcal{G}, \mu}, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-\tau}, 0)$$

so erhält man

Korollar:

Für isolierte Kurvensingularitäten ist die Modularität auf den μ -Klassen konstant. □

5.2.2 Satz:

Ist $f \in \mathcal{M}^2(3)$ μ -homotop zu einer isolierten Singularität $g \in \mathcal{M}^2(3)$ mit Modularität höchstens zwei, so haben f und g dieselbe Modularität. f und g gehören dann derselben Arnoldschen Klasse an.

Beweis:

Die Milnorgitter von f und g sind isomorph und haben insbesondere dieselbe Signatur (μ_+, μ_-, μ_0) . Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $\mu_0 + \mu_+ = 0$

Das Milnorgitter ist negativ definit. Deshalb sind f und g einfache (0-modulare) Singularitäten (siehe Tjurina, [Tj 1]). Die zugehörigen Klassen lassen sich an Hand ihrer Milnorgitter unterscheiden.

(ii) $\mu_0 + \mu_+ = 2$

Die Modularität von g ist 1 oder 2. Nach A. H. Durfee [Du 1] ist $(f^{-1}(0), 0)$ eine minimal-elliptische Hyperflächensingularität im Sinne von Laufer. Laufer hat in [Lau 2] die minimal-elliptischen Hyperflächensingularitäten durch die dualen Graphen ihrer minimalen (guten) Auflösungen klassifiziert.

Die dualen Graphen von minimalen guten Auflösungen sind eine Invariante unter μ -Homotopie (vgl. 4.3.2). Aus der Klassifikation folgt, daß f und g der gleichen Arnoldschen Klasse angehören. □

KAPITEL II DIE PROBLEMSTELLUNG DIESER ARBEIT UND DER AUFBAU
DER BEWEISE IHRER HAUPTERGEBNISSE

II.1 Der Vereinfachungsbegriff, bekannte Vereinfachungs-
ergebnisse und die Problemstellung dieser Arbeit

II.1.1 Der Vereinfachungsbegriff

Wir werden in dieser Arbeit stets den Begriff der μ -Vereinfachung zugrunde legen:

Definition:

Seien $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ isolierte Singularitäten.

Dann μ -vereinfacht sich f in g ($f \xrightarrow{\mu} g$), wenn in jeder Umgebung von f in $\mathfrak{m}^2(n)$ ein $g' \in \mathfrak{m}^2(n)$ mit $g' \sim_{\mu} g$ liegt. Andernfalls schreiben wir $f \not\xrightarrow{\mu} g$.

Andere Vereinfachungsbegriffe erhält man, wenn man in dieser Definition die μ -Homotopie durch andere Äquivalenzrelationen ersetzt. Verwendet man in obiger Definition z.B. $g' \sim_R g$ oder $g' \sim_K g$ anstelle von $g' \sim_{\mu} g$, so erhält man den Begriff der Rechtsvereinfachung ($f \xrightarrow{R} g$) oder den der Kontaktvereinfachung ($f \xrightarrow{K} g$).

Für Vereinfachungen innerhalb der 0-modularen Singularitäten sind die drei Begriffe gleichwertig, da für diese Singularitäten die μ -Klassen, die Kontakt- und die Rechtsorbits zusammenfallen. (Alle Vereinfachungen wurden hier bereits von Arnold in [Ar 1] bestimmt, siehe auch [Si 1].)

Dies ist für die unimodularen Singularitäten bereits in den einfachsten Fällen falsch: Sei z.B. f eine $T_{2\ 3\ 7}$ -Singularität. Dann liegt in jeder Umgebung von f eine Singularität aus der Arnoldschen Klasse $T_{2\ 3\ 6}$, aber f kann sich in keine Singularität aus dieser Klasse kontaktvereinfachen (siehe 2.2.1).

Seien nun $f, g \in \mathfrak{m}^2(n)$ isolierte Singularitäten der Modularität höchstens zwei. Dann gilt (siehe I.3 und I.2.4):

- (i) $f \xrightarrow{\mu} g \iff$ in jeder Umgebung von f in $\mathfrak{m}^2(n)$ liegt eine Singularität aus der Arnoldschen Klasse von g .
- (ii) $f \xrightarrow{\mu} g \iff f(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 \xrightarrow{\mu} g(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2$.
- (iii) Für $h \in \mathfrak{m}^2(n)$ mit $h \sim_K f$ oder $h \xrightarrow{K} f$ gilt
 $f \xrightarrow{\mu} g \implies h \xrightarrow{\mu} g$.

X bezeichne die Arnoldsche Klasse von f in $\mathfrak{m}^2(n)$, Y die von g .

Statt $f \xrightarrow{\mu} g$ schreiben wir auch $f \xrightarrow{\mu} Y$.

Definition:

$$X \xrightarrow{\exists} Y : \iff \exists f' \in X : f' \xrightarrow{\mu} Y$$

$$X \xrightarrow{\forall} Y : \iff \forall f' \in X : f' \xrightarrow{\mu} Y$$

Bemerkungen: 1) Wir werden Beispiele angeben, in denen $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ gilt.

2) Aus (ii) folgt, daß $X \xrightarrow{\exists} Y$ bzw. $X \xrightarrow{\forall} Y$ in $\mathfrak{m}^2(n)$ genau dann gilt, wenn die entsprechende Relation in $\mathfrak{m}^2(n+1)$ gilt.

Ist $h \in \mathfrak{m}^2(n)$ ebenfalls eine isolierte Singularität der Modularität höchstens zwei, so gilt:

- (iv) $h \xrightarrow{\mu} X$ und $X \xrightarrow{\forall} Y \implies h \xrightarrow{\mu} Y$.
- (v) $h \not\xrightarrow{\mu} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y \implies h \not\xrightarrow{\mu} X$.

II.1.2 Ergebnisse über Vereinfachungen zwischen uni- und bimodularen Singularitäten von Karras, Brieskorn und Laufer

Die μ -Vereinfachungen innerhalb der unimodularen Singularitäten hat E. Brieskorn in [Br 2] vollständig angegeben. Für die Vereinfachungen der Spitzensingularitäten T_{pqr} greift er dabei auf die Arbeit [Ka] von Karras zurück. Auf Grund eines Resultates von K. Wirthmüller ([Wi], siehe hier IV.2.3) hängen die μ -Vereinfachungen innerhalb der unimodularen Singularitäten nicht von den Repräsentanten der Arnoldschen Klassen ab, das heißt die Relationen $X \xrightarrow{\exists} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y$ sind für diese Klassen äquivalent ([Br 2]).

Ist $X \subset \mathfrak{m}^2(3)$ eine uni- oder bimodulare Arnoldsche Klasse, so gilt für die durch $f \in X$ definierten Flächensingularitäten $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$:

Der duale Graph einer minimalen Auflösung von $(f^{-1}(0), 0)$ ist eine Invariante für X .

Die Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels einer minimalen Auflösung von $(f^{-1}(0), 0)$ wird durch die folgende Tabelle beschrieben

X aus Gruppierung	Selbstschnittzahl
E	-1
Z, W	-2
Q, S, U	-3

Laufer beweist in [Lau 3] unter anderem

Theorem (Laufer):

Es seien X, Y uni- oder bimodulare Arnoldsche Klassen in $\mathfrak{m}^2(3)$ mit gleicher Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels der zugehörigen minimalen Auflösungen. Dann gilt

$$X \xrightarrow{\exists} Y \iff X \xrightarrow{\forall} Y$$

Sämtliche μ -Vereinfachungen zwischen solchen Klassen werden

bis auf Transitivität durch die im Anhang A.3 reproduzierten Tabellen vollständig beschrieben.

Laufer beweist dieses Theorem, indem er Deformationen minimaler Auflösungen von uni- und bimodularen Flächensingularitäten, die simultan niedergeblasen werden können, studiert. Er zeigt ([Lau 3], Thm. 4.8, 4.10):

Für eine semiuniverselle Deformation

$$(f^{-1}(0), 0) \hookrightarrow (V, 0) \xrightarrow{\pi} (S, 0)$$

einer uni- oder bimodularen Flächensingularität $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ ist für

$$T := \{s \in S \mid \pi^{-1}(s) \text{ enthält eine Flächensingularität mit gleicher Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels wie } (f^{-1}(0), 0)\}$$

die Einschränkung

$$(f^{-1}(0), 0) \hookrightarrow (\pi^{-1}(T), 0) \xrightarrow{\pi|} (T, 0)$$

die maximale Deformation, die nach einem durch eine endliche Abbildung induzierten Parameterraumwechsel simultan aufgeblasen werden kann.

Die Klassen der uni- und bimodularen Singularitäten, die in den Fasern über T auftreten, hängen lediglich von der Arnoldschen Klasse von f ab.

(Wir gehen auf den Beweis für die Äquivalenz von $X \xrightarrow{\exists} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y$ nicht ausführlich ein, da wir die Ergebnisse von Laufer nicht verwenden werden.)

Die unimodularen Klassen T_{pqr} mit $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$ sowie die bimodularen Klassen $J_{3,i}, Z_{1,i}, Q_{2,i}, W_{1,i}, W_{1,i}^{\#}, S_{1,i}, S_{1,i}^{\#}, U_{1,i}$ mit $i \geq 1$ bestehen aus lediglich einer Kontaktäquivalenzklasse. Für solche Klassen X ist deshalb die Äquivalenz von $X \xrightarrow{\exists} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y$ trivial.

Einen Teil der Ergebnisse von Laufer und Brieskorn findet man bereits in den Klassifikationsarbeiten von Arnold, z.B. in [Ar 3].

Gorjunov gibt in [Go] an, einige Vereinfachungsergebnisse berechnet zu haben, die über die oben aufgeführten Ergebnisse hinausgehen.

II.1.3 Die Problemstellung dieser Arbeit

Im folgenden bezeichne X eine der vierzehn bimodularen exceptionellen Arnoldschen Klassen oder eine der sechs bimodularen Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ oder $U_{1,0}$ in $\mathfrak{m}^2(n)$, sowie Y eine von X verschiedene uni- oder bimodulare Arnoldsche Klasse in $\mathfrak{m}^2(n)$.

Sei $f \in X$. In dieser Arbeit bestimmen wir alle μ -Vereinfachungen $f \xrightarrow{\mu} Y$ von f in die uni- und bimodularen Arnoldschen Klassen Y .

Bemerkungen:

- (i) f gehört genau dann zu einer der genannten Klassen X , wenn f bimodular und rechtsäquivalent zu einer semi-quasihomogenen Singularität ist.
Wir können o.B.d.A. stets voraussetzen, daß f die Normalform aus Anhang A.1 hat oder eine äquivalente Normalform besitzt.
- (ii) X und Y liegen in verschiedenen μ -Klassen. Aus der Oberhalbstetigkeit der Milnorzahl folgt deshalb:
 $f \xrightarrow{\mu} Y$ ist nur möglich, wenn die Singularitäten aus Y eine kleinere Milnorzahl als $f \in X$ haben.
- (iii) Für einen quasihomogenen Repräsentanten $f \in X$ beweisen wir $f \xrightarrow{\mu} Y$, indem wir eine einparametrische stetige Familie f_t , $t \in \mathbb{C}$, mit $f_0 \in X$ und $f_t \in Y$ für $t \neq 0$ genügend klein, angeben.
Die Familien f_t findet man im Anhang A.5.

Aufgrund der Resultate von Laufer sind noch diejenigen μ -Vereinfachungen von $f \in X \subset \mathbb{m}^2(3)$ zu bestimmen, für die sich die Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels der minimalen Auflösung ändert.

Die von Laufer durch Deformation der minimalen Auflösung und anschließendem Niederblasen bewiesenen Vereinfachungen für $f \in X$ (wobei X eine der oben aufgeführten zwanzig bimodularen Klassen ist) werden von uns vollständig mit anderen Methoden kontrolliert. Insbesondere greifen wir nicht auf die Äquivalenz der Aussagen $X \xrightarrow{\exists} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y$ in den von Laufer betrachteten Fällen zurück.

II.2 Der Aufbau der Argumentation

Zur Lösung unserer Aufgabe orientieren wir uns an den von Brieskorn in [Br 2] verwendeten Methoden:
X und Y seien wie in 1.3 definiert.

- Im Abschnitt 2.1 vergleichen wir die einfachen analytischen Invarianten Korang, Multiplizität $\tilde{\nu}$ und den Typ des Tangentialkegels $\tilde{T}(f)$ der Klassen und können so die Fälle, in denen eine Vereinfachung $X \xrightarrow{\exists} Y$ möglich ist, bereits weitgehend einschränken.
- Manchmal liefert die Betrachtung der Tjurinazahlen einfache Argumente, um $X \xrightarrow{\exists} Y$ oder $X \xrightarrow{\forall} Y$ auszuschließen. Wir geben hierfür Beispiele in Abschnitt 2.2.
- Die Untersuchung der primitiven Einbettbarkeit von Milnorgittern liefert ein weiteres Kriterium, mit dem $X \xrightarrow{\exists} Y$ ausgeschlossen werden kann.
- In den Fällen, in denen $X \xrightarrow{\exists} Y$ bzw. $X \xrightarrow{\forall} Y$ nachzuweisen ist oder mit den bisher genannten Methoden nicht ausgeschlossen werden kann, wird für geeignete Repräsentanten $f \in X$ in einer transversalen Scheibe $\bar{\tau} : T \rightarrow \mathfrak{m}^2(n)$ von f das Stratum der $t \in T$ mit $\bar{\tau}(t) \in Y$ untersucht.

In den Abschnitten 2.3 und 2.4 dieses Kapitels skizzieren wir für die beiden zuletzt genannten Punkte den Argumentationsweg. Wir verweisen dabei auf die zu verwendenden Methoden, die in Kapitel IV dargestellt werden. Die für die konkreten Fälle dann noch auszuführenden Rechnungen findet man in Kapitel V.

II.2.1 Eine grobe Strukturierung des Vereinfachungsverhaltens

2.1.1 Wir nehmen eine grobe Einteilung der uni- und bimodularen Arnoldschen Klassen anhand ihrer Invarianten Korang, $\tilde{v}(f)$, und $\tilde{T}(f)$ (vergleiche I.3.2) wie folgt vor:

E: $T_{2\ 3\ r}$ ($r \geq 6$); E_{12} ; E_{13} ; E_{14} ; $J_{3,i}$ ($i \geq 0$); E_{18} ; E_{19} ; E_{20} ;
 Z: $T_{2\ 4\ r}$ ($r \geq 4$); Z_{11} ; Z_{12} ; Z_{13} ; $Z_{1,i}$ ($i \geq 0$); Z_{17} ; Z_{18} ; Z_{19} ;
 Q: $T_{3\ 3\ r}$ ($r \geq 3$); Q_{10} ; Q_{11} ; Q_{12} ; $Q_{2,i}$ ($i \geq 0$); Q_{16} ; Q_{17} ; Q_{18} ;
 W: $T_{2\ q\ r}$ ($q, r \geq 5$); W_{12} ; W_{13} ; $W_{1,i}$ ($i \geq 0$); $W_{1,i}^\#$ ($i \geq 1$); W_{17} ; W_{18} ;
 S: $T_{3\ q\ r}$ ($q, r \geq 4$); S_{11} ; S_{12} ; $S_{1,i}$ ($i \geq 0$); $S_{1,i}^\#$ ($i \geq 1$); S_{16} ; S_{17} ;
 U: $T_{p\ q\ r}$ ($p, q, r \geq 4$); U_{12} ; $U_{1,i}$ ($i \geq 0$); U_{16} ;

Viele Vereinfachungen zwischen diesen Gruppierungen lassen sich bereits aus elementaren Gründen ausschließen:

a) $E, Z, W \not\rightarrow Q, S, U$

(d.h. es kann keine Singularität aus einer der unter E, Z oder W genannten Klassen geben, die sich in eine unter Q, S oder U genannte Klasse μ -vereinfacht.)

Beweis: Der Korang ist halbstetig.

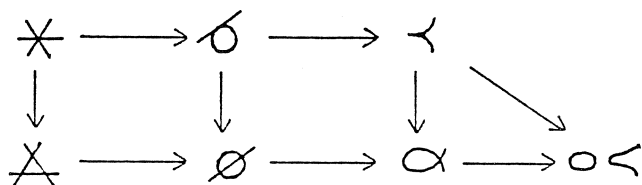
b) $E \not\rightarrow Z, W$; $Z \not\rightarrow W$

Beweis: Die zu E gehörenden Kurvensingularitäten haben die Multiplizität 3, die zu Z und W gehörenden die Multiplizität 4. Die Multiplizität ist halbstetig nach oben, also folgt $E \not\rightarrow Z, W$.

Der Tangentialkegel einer zu Z gehörenden Kurvensingularität wird durch ein homogenes Polynom vierten Grades beschrieben, das mindestens eine einfache Nullstelle in $P_1(\mathbb{C})$ besitzt. Die entsprechenden Polynome für W haben aber nur mehrfache Nullstellen in $P_1(\mathbb{C})$. Es folgt: $Z \not\rightarrow W$.

c) $\underline{Q \dashrightarrow S, U; S \dashrightarrow U}$

Beweis: Der Tangentialkegel einer zu Q , S oder U gehörenden Flächensingularität ist der Kegel über einer kubischen Kurve in $P_2(\mathbb{C})$ ohne mehrfache Komponenten. Deren Verhalten unter kleinen Störungen erfaßt das folgende Diagramm:



d) $\underline{Q \dashrightarrow Z, W}$

Beweis: Sei $g \in \mathfrak{m}^2(3)$ eine zu Z oder W gehörende Flächensingularität. Da $\tilde{v}(g) = 4$, folgt

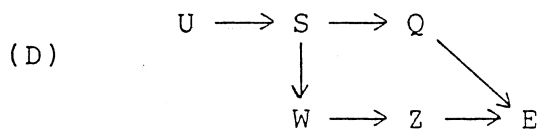
$$g(x, y, z) \sim_{\mathbb{R}} z^2 \bmod \mathfrak{m}^4(3).$$

Der kubische Anteil der Taylorentwicklung von g ist also ein reduzibles Polynom.

Der kubische Anteil der Taylorentwicklung einer Flächensingularität aus der Gruppierung Q ist aber irreduzibel, bleibt also auch unter kleinen Störungen irreduzibel.

Satz:

Das folgende Diagramm (D) veranschaulicht die noch verbleibenden Möglichkeiten für Vereinfachungen zwischen den verschiedenen Gruppierungen bis auf Transitivität.



Wir werden im folgenden Vereinfachungen, das Verhalten von Invarianten usw. nur noch zwischen solchen uni- und bimodularen Klassen untersuchen, die den durch das Diagramm (D) beschriebenen notwendigen Bedingungen für Vereinfachungen genügen.

2.1.2 Es seien X, Y_i ($1 \leq i \leq \ell$) Arnoldsche Klassen mit

$$(*) \quad Y_\ell \xrightarrow{\forall} Y_{\ell-1} \xrightarrow{\forall} \dots \xrightarrow{\forall} Y_1.$$

Ferner sei ℓ_0 eine natürliche Zahl mit $\ell \geq \ell_0 \geq 1$.

Wir werden in unseren Argumentationen stillschweigend die folgenden Transitivitätsargumente benutzen:

$$X \xrightarrow{\exists} Y_{\ell_0} \implies X \xrightarrow{\exists} Y_i \quad \text{für } i \leq \ell_0,$$

$$X \xrightarrow{\forall} Y_{\ell_0} \implies X \xrightarrow{\forall} Y_i \quad \text{für } i \leq \ell_0,$$

$$\text{nicht } (X \xrightarrow{\exists} Y_{\ell_0}) \implies \text{nicht } (X \xrightarrow{\exists} Y_i) \quad \text{für } i \geq \ell_0,$$

$$\text{nicht } (X \xrightarrow{\forall} Y_{\ell_0}) \implies \text{nicht } (X \xrightarrow{\forall} Y_i) \quad \text{für } i \geq \ell_0.$$

Für die Konstruktion der Vereinfachungsketten (*) benutzen wir

- a) die Ergebnisse aus [Br 2] über die Vereinfachungen der unimodularen Singularitäten,
- b) die folgenden, leicht zu beweisenden Vereinfachungen, die bereits in [Ar 3] angegeben sind:

$$J_{3,i+1} \xrightarrow{\forall} J_{3,i} \quad (i \geq 0); \quad Z_{1,i+1} \xrightarrow{\forall} Z_{1,i} \quad (i \geq 0);$$

$$Q_{2,i+1} \xrightarrow{\forall} Q_{2,i} \quad (i \geq 0);$$

$$W_{1,i+1} \xrightarrow{\forall} W_{1,i} \quad (i \geq 0); \quad W_{1,i+1}^\# \xrightarrow{\forall} W_{1,i}^\# \quad (i \geq 1);$$

$$W_{1,1}^\# \xrightarrow{\forall} W_{1,0};$$

$$S_{1,i+1} \xrightarrow{\forall} S_{1,i} \quad (i \geq 0); \quad S_{1,i+1}^\# \xrightarrow{\forall} S_{1,i}^\# \quad (i \geq 1);$$

$$S_{1,1}^\# \xrightarrow{\forall} S_{1,0};$$

$$U_{1,i+1} \xrightarrow{\forall} U_{1,i} \quad (i \geq 0);$$

- c) einige von uns bewiesene Ergebnisse.

II.2.2 Argumentationen mit der Tjurinazahl

2.2.1 Die Tjurinazahl ist ebenso wie die Milnorzahl oberhalbstetig. Für die Untersuchung minimaler K -transversaler Scheiben kann man diese Aussage verschärfen. Der folgende Satz ist eine einfache Folgerung aus der Offenheit der Versalität und des Dimensionssatzes für transversale Scheiben (siehe I.2.3.1).

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ eine isolierte Singularität mit Tjurinazahl $\tau(f)$ und $\bar{T}: T \rightarrow \mathcal{M}^2(n)$ eine minimale K -transversale Scheibe für f . Ferner sei $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (T, 0)$ ein holomorpher Abbildungskeim mit den Eigenschaften

- (i) $\gamma(z) \neq 0$ für $z \neq 0$
- (ii) $\bar{T}(\gamma(z_1)) \sim_K \bar{T}(\gamma(z_2))$ für $z_1, z_2 \neq 0$.

Dann gilt für $z \neq 0$

$$\tau(\bar{T}(\gamma(z))) < \tau(f).$$

□

Bemerkungen:

- (i) Wir werden diesen Satz in Kapitel III anwenden, um $S_{1,1}^{\#} \xrightarrow{\exists} E_{14}$ zu widerlegen.
- (ii) Aus dem Satz folgt sofort, daß sich z.B. ein $f \in T_{2,3,7}$ nicht in ein $g \in T_{2,3,6}$ kontaktvereinfachen kann.

2.2.2 Wir haben vier Fälle gefunden, in denen $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ gilt. Es sind dies

$$\begin{array}{ll} W_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{14} & S_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{13} \\ U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,9} & U_{1,0} \xrightarrow{\exists} Z_{13} \end{array}$$

In Kapitel V werden wir durch eine Analyse der Gleichungen diejenigen $f \in X$ bestimmen, für die $f \xrightarrow{\mu} Y$ gilt. Wir können aber bereits jetzt durch eine Betrachtung der Tjurina-

zahl beweisen:

Satz:

In den vier oben aufgeführten Fällen ist $X \xrightarrow{\forall} Y$ nicht möglich.

Beweis:

Wir zeigen, daß $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{14}$ nicht möglich ist. Die anderen Fälle folgen analog.

Wir erinnern zunächst, daß E_{14} in zwei Kontaktorbits mit Tjurinazahl 14 bzw. 13 zerfällt. Jede Singularität aus dem Kontaktorbit mit Tjurinazahl 14 kontaktvereinfacht sich in die Singularitäten aus dem Kontaktorbit mit Tjurinazahl 13 (vgl I.3.4).

Nehmen wir an, daß $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{14}$ gilt. Dann folgt, daß sich alle $W_{1,0}$ -Singularitäten in die E_{14} -Singularitäten mit Tjurinazahl 13 kontaktvereinfachen. Dies führt zu einem Widerspruch:

Es sei $\tau: \mathbb{C}^{15} \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$ eine minimale R -transversale Scheibe für ein $f \in W_{1,0}$. Wir können ein Gebiet $0 \in G \subset \mathbb{C}^{15}$ so wählen, daß für alle $t \in G$ gilt:

- (i) $\tau(t)$ ist höchstens zweimodular
- (ii) Die induzierte Scheibe τ_t (siehe I.2.3.1) ist R -transversale Scheibe für $\tau(t)$,
- (iii) $\Sigma(15) := \{t \in G \mid \mu(\tau(t)) = 15\} \subset G$ ist analytisch und es ist
 $\Sigma(15) = \{t \in G \mid \tau(t) \in W_{1,0}\}$.

Nach I.2.5 ist $\dim(\Sigma(15), 0) = m(f) = 2$.

Wir werden zeigen:

- (*) Es existieren analytische Mengen $0 \in B \subset A \subset G$ mit
 $\dim B < \dim A$ und
 $A - B = \{t \in G \mid \tau(t) \in E_{14} \text{ und } \tau(\tau(t)) = 13\}$.

Aus der Offenheit der Versalität folgt dann

$$\Sigma(15) \subset \overline{A-B} \quad \text{und deshalb} \quad \Sigma(15) \subset B,$$

also

$$\dim A > \dim \Sigma(15) \geq 2$$

Folglich existiert ein $t_0 \in A-B$ mit $\dim(A, t_0) > 2$.

Da andererseits für alle $t, t' \in A-B$

$$\bar{\tau}(t) \sim_K \bar{\tau}(t')$$

gilt, ergibt sich mit Eigenschaft (ii) und dem Dimensionssatz aus I.2.3.1:

Für jedes $t \in A-B$ ist

$$\dim(A, t) = 15 - \tau(\bar{\tau}(t)) = 2.$$

Beweis von (*):

Aus (i) und dem Satz aus I.2.4.1 folgt:

Es existieren analytische Mengen $B' \subset A' \subset G$ mit

$$A' - B' = \{t \in G \mid \bar{\tau}(t) \in E_{14}\}.$$

Es sei

$$B'' := \{t \in A' \mid \tau(\bar{\tau}(t)) > 13\}.$$

Dann ist

$$A' - (B' \cup B'') = \{t \in G \mid \bar{\tau}(t) \in E_{14} \text{ und } \tau(\bar{\tau}(t)) = 13\}.$$

Wir zerlegen A' in irreduzible analytische Mengen A'_j , $j \in J$.

Es sei

$$J^* := \{j \in J \mid A'_j \not\subset B' \cup B''\}.$$

Es ist $J^* \neq \emptyset$, weil nach Annahme 0 Häufungspunkt von $A' - (B' \cup B'')$ ist.

Es sei A die Vereinigung der A'_j mit $j \in J^*$ und $B := A \cap (B' \cup B'')$.

Aus der Konstruktion von A und B sowie dem Identitätssatz für irreduzible analytische Mengen folgt

$$\dim B < \dim A.$$

□

II.2.3 Die Untersuchung der topologischen Invarianten und der Spektren

Im folgenden bezeichnen wir mit X, Y stets uni- oder bimodulare Arnoldsche Klassen. Der Einfachheit halber seien $X, Y \in \mathfrak{m}(3)$. Mit $L(X)$ bezeichnen wir die Isomorphieklasse des Milnorgitters, mit $\mathcal{D}^*(X)$ die Menge der Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen und mit $\text{Spec}(X)$ das Spektrum einer Singularität $f \in X$. Diese Definitionen sind unabhängig vom gewählten $f \in X$.

In I.4 haben wir jeder Arnoldschen Klasse X der Modularität eins oder zwei eine spezielle Menge $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}^*(X)$ von Dynkindiagrammen zu ausgezeichneten Basen und eine spezielle Menge $\mathcal{D}_s(X)$ von Dynkindiagrammen zu schwach ausgezeichneten Basen zugeordnet. Wir definieren jetzt die folgenden Relationen:

$$L(Y) \longrightarrow L(X) : \langle \implies \rangle$$

Das Milnorgitter einer Singularität aus Y läßt sich primitiv in das Milnorgitter einer Singularität aus X einbetten.

$$\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y) : \langle \implies \rangle$$

Das Spektrum einer Singularität aus X vereinfacht sich in das Spektrum einer Singularität aus Y .

$$\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X) : \langle \implies \rangle$$

Es existiert eine Kette $Y = Y_1, \dots, Y_k = X$ uni- oder bimodularer Klassen, so daß für jedes $j, 1 \leq j \leq k-1$, ein Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}(Y_j)$ existiert, das ohne Berücksichtigung der Bewertung Teilgraph eines Diagrammes aus $\mathcal{D}(Y_{j+1})$ ist.

$$\mathcal{D}_s(Y) \leq_s \mathcal{D}_s(X) : \langle \implies \rangle$$

Es existiert eine Kette uni- oder bimodularer Klassen $Y = Y_1, \dots, Y_k = X$, so daß für $1 \leq j \leq k-1$ gilt:

(i) Y_j, Y_{j+1} genügen den durch das Diagramm (D)

in II.2.1.1 beschriebenen notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Vereinfachung $Y_{j+1} \xrightarrow{\exists} Y_j$.
(ii) In $\mathcal{D}_S(Y_j)$ existiert ein Diagramm, das Teilgraph eines Diagrammes aus $\mathcal{D}_S(Y_{j+1})$ ist.

Die Relationen sind transitiv. Die Dynkindiagramme aus den Mengen $\mathcal{D}(Y)$ zu ausgezeichneten Basen verhalten sich unter Einbettungen wie im Diagramm (D) aus II.2.1.1 beschrieben. Es gilt deshalb für uni- oder bimodulare Klassen X, Y :

$$\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X) \implies \mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X),$$

$$\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X) \implies L(Y) \longrightarrow L(X).$$

In I.4.10 haben wir gezeigt:

Satz:

Sind X, Y uni- oder bimodulare Singularitätenklassen und gilt $X \xrightarrow{\exists} Y$, so läßt sich jedes Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}^*(Y)$ zu einem Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}^*(X)$ ergänzen. Insbesondere gilt $L(Y) \longrightarrow L(X)$.

Die primitive Einbettbarkeit der Milnorgitter ist also eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Vereinfachung. Aus heuristischen Gründen und da die notwendigen Rechnungen einfach sind, führen wir die Untersuchung in einem etwas erweiterten Rahmen durch:

Es sei X eine der vierzehn bimodularen exzeptionellen Klassen oder eine der Klassen

$$J_{3,j}; Z_{1,j}; Q_{2,j}; (0 \leq j \leq 4);$$

$$W_{1,j}; S_{1,j}; (0 \leq j \leq 3);$$

$$W_{1,j}^\#; S_{1,j}^\#; (1 \leq j \leq 3);$$

$$U_{1,j}; (0 \leq j \leq 2);$$

und Y eine von X verschiedene uni- oder bimodulare Klasse, so daß X, Y den durch das Diagramm (D) in 2.1.1 beschriebenen notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Vereinfachung $X \xrightarrow{\exists} Y$ genügen.

Wir untersuchen, welche der folgenden Relationen gelten:

$$\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y), \quad L(Y) \longrightarrow L(X),$$

$$\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X), \quad \mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X).$$

Die Ergebnisse sind in den Tabellen im Anhang A.4 zusammengefaßt. Im Kapitel III vergleichen wir die Relation $X \xrightarrow{\exists} Y$ mit den Relationen $\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y)$ und $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$.

Bemerkungen:

- (i) Wir untersuchen die Spektren, um die Vermutung von Arnold (siehe I.4.2) zu überprüfen. Die Spektren findet man in der Tabelle im Anhang A.8. Die Untersuchung der Vereinfachungen der Spektren wurde mit einem Computer durchgeführt.
- (ii) Wir untersuchen die Relation $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$, um das Einbettungsverhalten der speziellen, von Gabriellov und Ebeling bestimmten Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen mit dem Vereinfachungsverhalten der Singularitäten zu vergleichen. Die Relation gab uns z.B. in den Fällen $W_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{14}$, $S_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{13}$ und $U_{1,0} \xrightarrow{\exists} Z_{13}$ erste heuristische Hinweise auf zu erwartende Vereinfachungen.
- (iii) Wir untersuchen $\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X)$ lediglich, weil dies den Nachweis der primitiven Einbettbarkeit der Milnorgitter auf besonders einfache Weise erlaubt.

V. V. Nikulin hat in seiner Arbeit [Ni] einen Algorithmus angegeben, mit dem für nichtentartete Milnorgitter in vielen Fällen über die Existenz einer primitiven Einbettung entschieden werden kann. Wir stellen diese Methode in Kapitel IV.1 dar und verallgemeinern sie auf den Fall, daß das einzubettende Gitter einen eindimensionalen Kern hat. Die für die Anwendung dieser Technik notwendigen Informationen über die Milnorgitter - die Signatur und die Zerlegung der Diskriminantenform in irreduzible Komponenten - können wir in den von uns betrachteten Fällen leicht aus den Ergebnissen von Gabriellov [Ga 2] und Ebeling [Eb 2] herleiten. Wir haben die Invarianten im Anhang A.6 zusammengefaßt.

Die Fälle, in denen die von Nikulin entwickelte Technik angewendet wird, um über die Existenz einer primitiven Einbettung $L(Y) \longrightarrow L(X)$ zu entscheiden, sind in den Tabellen in A.4 mit einem kleinen Punkt markiert. Die entsprechende Rechnung findet man in V.1. Die Fälle mit $\text{rg } L(X) = \text{rg } L(Y)$ wurden bereits in I.5.1 behandelt. Sie sind deshalb nicht mit einem Punkt markiert.

II.2.4 Zur Analyse der Gleichungen

2.4.1 Wir wollen nun unsere Argumente in denjenigen Fällen skizzieren, in denen über $X \xrightarrow{\exists} Y$ bzw. $X \xrightarrow{\forall} Y$ durch eine Analyse der Gleichungen entschieden wird.

Es sei X eine exzeptionelle bimodulare Klasse oder eine der Klassen $J_{3,0'}$, $Z_{1,0'}$, $Q_{2,0'}$, $W_{1,0'}$, $S_{1,0}$ oder $U_{1,0}$, und Y sei eine beliebige von X verschiedene uni- oder bimodulare Klasse. Die Singularitäten aus X werden bis auf Stabil-Äquivalenz durch eine zweiparametrische Familie f_{a_0, a_1} semiquasihomogener Funktionen in zwei oder drei Veränderlichen beschrieben. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß die Funktionen aus X, Y die gleiche Anzahl von Veränderlichen wie die Familie f_{a_0, a_1} haben.

Die möglichen Gruppierungen E, Z, Q, W, S oder U , zu denen Y gehören kann, wenn eine Vereinfachung $X \xrightarrow{\exists} Y$ existiert, wurde bereits in 2.1.1 eingeschränkt. Innerhalb einer Gruppierung sind nur noch die Klassen Y möglich, für die $L(Y) \longrightarrow L(X)$ gilt. Wir werden die in 2.1.2 aufgeführten Transitivitätsüberlegungen stillschweigend benutzen.

Die Analyse der Gleichungen besteht nun darin, für geeignete Singularitäten g einer Normalform f_{a_0, a_1} eine transversale Scheibe $\bar{T}: T \longrightarrow m^2(n)$ zu wählen, die Parameter $t \in T$ mit $\bar{T}(t) \in Y$ durch algebraische Bedingungen zu beschreiben und zu entscheiden, ob es einen holomorphen Weg $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow T$ mit $\gamma(0) = 0$, $\bar{T}(\gamma(z)) \in Y$ für $z \neq 0$ klein, gibt. γ definiert dann

eine einparametrische Familie $F_z := \bar{T}(\gamma(z))$, wobei $F_0 = g$ und $F_z \in Y$ für $z \neq 0$ klein.

Für die quasihomogenen Funktionen einer Normalform von X können wir solche Wege, falls sie existieren, explizit angeben. Die zugehörigen Funktionenfamilien sind im Anhang A.5 zusammengefaßt. Für die nicht quasihomogenen Funktionen g aus f_{a_0, a_1} verwenden wir im allgemeinen die in IV.2.2 und IV.2.3 dargestellten Argumente, um über die Existenz einer Vereinfachung $g \xrightarrow{\mu} Y$ zu entscheiden. Wir gehen hierauf in 2.4.4 und 2.4.5 noch weiter ein.

Die meisten Vereinfachungsrelationen des Typs $X \xrightarrow{\forall} Y$ folgen bis auf Transitivität aus den ebenfalls in A.5 angegebenen Familien. Die dort angegebene Liste umfaßt unter anderem die Fälle $X \xrightarrow{\forall} Y$, für die eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$X = J_{3,0}, Z_{1,0}, Q_{2,0}, W_{1,0}, S_{1,0}$ oder $U_{1,0}$, Y beliebig

X beliebig, $Y \neq T_{pqr}$

X, Y beide aus den Gruppierungen Q, S, U

X, Y beide aus den Gruppierungen Z, W

X, Y beide aus der Gruppierung E

Der Beweis der bis dahin noch nicht bewiesenen Vereinfachungsrelationen des Typs nicht $(X \xrightarrow{\exists} Y)$ sowie $X \xrightarrow{\forall} Y$ und die Bestimmung der $f \in X$ mit $f \xrightarrow{\mu} Y$ in den Fällen, wo $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ gilt, erfolgt dann in Kapitel V.2 durch eine Analyse der Gleichungen.

Wir gehen im weiteren auf einige technische Aspekte bei der Analyse der Gleichungen ein.

2.4.2 Das Aufstellen algebraischer Bedingungen

Im folgenden sei $\bar{T}: T \rightarrow m^2(n)$ eine transversale Scheibe einer isolierten Singularität $f \in m^2(n)$. Y bezeichne eine

uni- oder bimodulare Arnoldsche Klasse in $m^2(n)$. Die Frage, für welche Parameter $t \in T$ $\bar{T}(t) \in Y$ gilt, führt auf algebraische Bedingungen an die Parameter t . Bei der Bestimmung der algebraischen Bedingungen haben wir teilweise einen Computer benutzt. Die eigentliche Schwierigkeit lag jedoch nicht in der Herleitung solcher Bedingungen, sondern in der expliziten Angabe geeigneter Lösungen $t \in T$ für diese Bedingungen.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) $f \in m^3(2)$, $Y \in m^3(2)$

Die Arnoldsche Klasse Y wird durch das zugehörige System der Multiplizitätensequenzen bestimmt. Wir beschreiben in IV.3.1 ein Verfahren für die Aufstellung algebraischer Bedingungen anhand des Systemes der Multiplizitätensequenzen.

(ii) $f \in m^3(3)$, $Y \in m^2(3)$ mit $\text{Korang}(Y) = 2$

Damit für einen Parameter $t \in T$ die Singularität $\bar{T}(t)$ den Korang zwei hat, muß der 2-Jet von $\bar{T}(t)$ die Gestalt

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$$

mit $(a,b,c) \neq 0$ haben. Dies liefert erste algebraische Bedingungen.

Falls $c \neq 0$ und $\bar{T}(t)$ ein quadratisches Polynom in x_3 ist, können wir durch Bildung der Diskriminante von der Flächensingularität zu einer Kurvensingularität übergehen (siehe IV.3.2.1). Die weiteren algebraischen Bedingungen stellt man dann wieder anhand des zugehörigen Systemes der Multiplizitätensequenzen auf.

(iii) $f \in m^3(3)$, $Y \in m^3(3)$

Wir haben in Kapitel V lediglich für den Beweis von nicht $(U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{3,3,8})$ eine Analyse der Gleichungen durchzuführen. Unter Benutzung einiger Ergebnisse von C. T. C. Wall ([Wa]) (siehe IV.3.2) wird die Analyse auf ein Problem für Kurvensingularitäten zurückgeführt.

Bemerkung: Die Berechnung der stetigen Familien im Anhang A.5 für die Fälle $X \xrightarrow{\nu} Y$ mit X, Y aus den Gruppierungen Q oder S wird mit den Ergebnissen von C. T. C. Wall ([Wa]) auf die Berechnung stetiger Familien entsprechender Kurvensingularitäten zurückgeführt.

2.4.3 In den Rechnungen in Kapitel V werden wir nur transversale Scheiben für quasihomogene Singularitäten aus X benötigen.

Sei also $f \in X$ quasihomogen. In IV.2.1 beschreiben wir die Konstruktion von transversalen Scheiben. Auf geeigneten transversalen Scheiben $\bar{\tau} : T \rightarrow \mathfrak{m}^2(n)$ für f ist eine \mathbb{C}^* -Aktion erklärt. Eigenschaften und Definition der \mathbb{C}^* -Aktion findet man in IV.2.2. Die \mathbb{C}^* -Aktion induziert eine Zerlegung

$$T = T^+ \oplus T^0 \oplus T^-.$$

Für die von uns betrachteten transversalen Scheiben ist stets

$$\dim_{\mathbb{C}} T^0 + \dim_{\mathbb{C}} T^- = 2.$$

T^+ hat die folgende nützliche Eigenschaft:

Der \mathbb{C}^* -Orbit eines Punktes $t \in T^+ - \{0\}$ definiert einen holomorphen Weg

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{C} &\longrightarrow T^+ \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = t, \\ &\quad \text{und} \quad \bar{\tau}(\gamma(z)) \sim_K \bar{\tau}(t) \quad \text{für} \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

Für $t \in T^+ - \{0\}$ gilt also: $f = \bar{\tau}(0) \xrightarrow{\mu} \bar{\tau}(t)$.

Die im Anhang A.5 angegebenen stetigen Familien für die quasihomogenen Singularitäten beschreiben stets solche \mathbb{C}^* -Orbits.

Die Untersuchung der algebraischen Bedingungen an die Parameter $t \in T$, für die $\bar{\tau}(t)$ einer vorgegebenen Singularitätenklasse Y angehört, vereinfacht sich, wenn man zusätzlich $t \in T^+$ fordert. Um möglichst einfache Lösungen $t \in T^+$ für die algebraischen Bedingungen angeben zu können, verwenden wir transversale Scheiben, die nicht minimal sind.

2.4.4 Vereinfachungen für die exzeptionellen bimodularen Klassen

Es sei X eine der 14 exzeptionellen bimodularen Arnold-schen Klassen. X wird durch eine Normalform (siehe Anhang A.1) der Gestalt

$$f_{a_0, a_1} = f + a_0 \psi_0 + a_1 \psi_1 \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C})$$

beschrieben, wobei f quasihomogen ist und ψ_0, ψ_1 Monome sind. Für die quasihomogenen Grade d, d_0, d_1 von f, ψ_0, ψ_1 gilt:

$$d < d_0 < d_1.$$

Die von uns gewählte transversale Scheibe \bar{T} für f ist von der Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{T} : T = \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathfrak{m}^2(n) \\ \bar{T}(t) &= f + t_{r-1} \psi_0 + t_r \psi_1 + \sum_{i=1}^{r-2} t_i \phi_i, \end{aligned}$$

wobei die ϕ_i Monome mit einem kleineren quasihomogenen Grad als d sind.

Es ist dann

$$\begin{aligned} T^+ &= \{t \in T \mid t_{r-1} = t_r = 0\}, \\ T^0 &= 0, \\ T^- &= \{t \in T \mid t_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r-2\}. \end{aligned}$$

Nach I.3.4 ist

$$\begin{aligned} f_{a_0, a_1} &\sim_K f_{1,0} \text{ für } a_0 \neq 0 \\ \text{und} \\ f_{0, a_1} &\sim_K f_{0,1} \text{ für } a_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt $f \xrightarrow{K} f_{0,1}$ und $f_{0,1} \xrightarrow{K} f_{1,0}$. Für eine Arnoldsche Klasse Y gilt deswegen

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{\exists} Y &\iff f \xrightarrow{\mu} Y, \\ X \xrightarrow{\forall} Y &\iff f + \psi_0 \xrightarrow{\mu} Y. \end{aligned}$$

Bei der Analyse der Gleichungen in Kapitel V werden wir zunächst $f \xrightarrow{\mu} Y$ bzw. $f \not\xrightarrow{\mu} Y$ beweisen. $f \xrightarrow{\mu} Y$ wird durch Bestimmung eines geeigneten $t \in T^+$ bewiesen. Gilt dann $f \xrightarrow{\mu} Y$, so können wir $f + \psi_0 \xrightarrow{\mu} Y$ mit einem Dimensionsargument aus der Untersuchung der Lösungen der algebraischen Bedingungen an die Parameter $t \in T$, für die $\bar{T}(t)$ zur Klasse Y gehört, folgern. Hierzu benutzen wir Satz 5 und Satz 6 aus IV.2.2 "C*-Aktion".

In den von uns untersuchten Fällen gilt deshalb:

$$X \xrightarrow{\exists} Y \iff X \xrightarrow{\forall} Y.$$

$f \xrightarrow{\mu} Y$ beweisen wir auf eine der folgenden Arten:

- a) Wir wenden ein Resultat von Wirthmüller (siehe IV.2.3) an. Es genügt dann zu zeigen, daß 0 kein Häufungspunkt von $\Omega(Y) \cap T'$ ist. Dabei ist:

$$\Omega(Y) := \{t \in T \mid \tau(t) \in Y\} \quad \text{und} \quad T' := \{t \in T \mid t_r = 0\}.$$

- b) Gilt für die Milnorzahlen $\mu(f) > \mu(Y)$, so besagt Satz 3 aus IV.2.2 " \mathbb{C}^* -Aktion":

$$f \xrightarrow{\mu} Y \implies \exists t \in T^+ - \{0\} : \tau(t) \xrightarrow{\mu} Y$$

Die von uns betrachteten minimalen transversalen Scheiben haben die Eigenschaft

$$\mu(\tau(t)) < \mu(f) \quad \text{für} \quad t \in T^+ - \{0\}.$$

Wissen wir z.B. aus der Untersuchung der Milnorgitter, daß es keine Klasse $Y' \neq X$ mit $f \xrightarrow{\mu} Y'$ und $Y' \xrightarrow{\exists} Y$ geben kann, so folgt

$$f \xrightarrow{\mu} Y \implies T^+ \cap \Omega(Y) \neq \emptyset.$$

Der Beweis wird so auf die Untersuchung von T^+ reduziert.

Bemerkung: Für S_{17} verwenden wir in Kapitel V nicht die von Arnold angegebene Normalform aus Anhang A.1, sondern eine äquivalente Familie, die ebenfalls die in diesem Abschnitt beschriebenen Eigenschaften hat.

2.4.5 Vereinfachungen für die Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$

Es sei X eine dieser sechs Klassen. X besitzt eine Normalform der Gestalt

$$f_{a_0, a_1} = f + a_0 \psi_0 + a_1 \psi_1,$$

wobei $a_1 \in \mathbb{C}$, $a_0 \in H \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} - H$ endlich ist. f ist quasihomogen, ψ_0, ψ_1 sind Monome. Für die quasihomogenen Grade d, d_0, d_1 von f, ψ_0, ψ_1 gilt:

$$d = d_0 < d_1.$$

Für den folgenden Satz legen wir die im Anhang A.1 angegebene Normalform zugrunde; in der Analyse der Gleichungen verwenden wir im Fall $X = S_{1,0}$ die in V.2.5.1 hergeleitete Familie.

Satz:

Das μ -Vereinfachungsverhalten von f_{a_0, a_1} , $a_0 \in H$, ist unabhängig vom Parameter a_1 .

Beweis:

Das Resultat folgt aus dem in IV.2.3.1 angegebenen Resultat von Wirthmüller. Unter Ausnutzung der durch die quasihomogene Gewichtung induzierten Filtrierung verifiziert man leicht die Bedingung

$$\psi_1 \notin \Delta f_{a_0, 0}$$

□

Es genügt also, das μ -Vereinfachungsverhalten für die quasihomogenen Funktionen einer Normalform zu untersuchen. Für die Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$ und $Q_{2,0}$ beweisen wir sämtliche Vereinfachungsergebnisse ohne Analyse der Gleichungen.

In der Analyse der Gleichungen für die quasihomogenen Funktionen $f_{a_0, 0}$ aus den Klassen $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$ verwenden wir transversale Scheiben

$$\tau_{a_0} : T = \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathfrak{m}^2(n)$$

mit

$$\tau_{a_0}(t) = f + (a_0 + t_{r-1})\psi_0 + t_r\psi_1 + \sum_{i=1}^{r-2} t_i\phi_i,$$

Dabei sind die ϕ_i Monome mit einem kleineren quasihomogenen Grad als d , und τ_{a_0} ist für alle $a_0 \in H$ eine transversale Scheibe für $f_{a_0, 0}$.

Es ist

$$T^+ = \{t \in T \mid t_{r-1} = t_r = 0\},$$

$$T^0 = \{t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } j \neq r-1\},$$

$$T^- = \{t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } j \neq r\}.$$

Die Monome werden so gewählt, daß wir uns für $a_0 \in H$ nach Wirthmüller (siehe IV.2.3.2) zur Untersuchung der

μ -Vereinfachungen von $f_{a_0,0}$ auf die Untersuchung von $T^+ \oplus T^0$ für τ_{a_0} beschränken können.

Wir können $a_0 + t_{r-1}$ zu einem neuen Parameter \hat{a}_0 zusammenfassen.

Es sei

$$H(Y) = \{\hat{a}_0 \in H \mid \tau_{\hat{a}_0}(T^+) \cap Y \neq \emptyset\}$$

für eine uni- oder bimodulare Klasse Y .

Dann gilt aufgrund der Eigenschaften von T^+ :

$$f_{a_0,0} \xrightarrow{\mu} Y \iff a_0 \in \overline{H(Y)},$$

wobei $\overline{H(Y)}$ den topologischen Abschluß von $H(Y)$ in H bezeichne.

Insbesondere gilt:

$$X \xrightarrow{\forall} Y \iff \overline{H(Y)} = H,$$

$$X \xrightarrow{\exists} Y \iff H(Y) \neq \emptyset.$$

KAPITEL III ERGEBNISSE

In Arnolds Klassifikation der bimodularen Hyperflächen-singularitäten gibt es genau 20 Klassen, die quasihomogene Funktionskeime enthalten. Sie gliedern sich in 14 exzeptionelle Klassen sowie in die 6 Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$. Das Vereinfachungsverhalten der Funktionskeime dieser Klassen bei Vereinfachung in die uni- und bimodularen Klassen wird durch die beiden folgenden Theoreme vollständig beschrieben. Wir legen dabei für die Klassen die Normalformen aus der Tabelle im Anhang A.1 zugrunde.

Für Klassen $X, Y \subset \mathbb{M}^2(n)$ aus Arnolds Klassifikation hatten wir in Kapitel II definiert

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{\forall} Y &\iff \text{für alle } f \in X \text{ gilt } f \xrightarrow{\mu} Y \\ X \xrightarrow{\exists} Y &\iff \text{es existiert ein } f \in X \text{ mit } f \xrightarrow{\mu} Y \end{aligned}$$

Theorem 1

Sämtliche Funktionskeime einer exzeptionellen bimodularen Klasse X aus Arnolds Liste besitzen bezüglich μ -Vereinfachung in eine vorgegebene uni- oder bimodulare Klasse dasselbe Vereinfachungsverhalten, das heißt die Aussagen $X \xrightarrow{\forall} Y$ und $X \xrightarrow{\exists} Y$ sind äquivalent. Die Vereinfachungen werden durch die Tabelle im Anhang A.2 beschrieben.

Die Normalformen für die Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$ sind zweiparametrische Familien f_{a_0, a_1} . Diese Familien zerfallen bezüglich Kontaktäquivalenz in die Familien $f_{a_0, 0}$ und $f_{a_0, 1}$. Die Funktionskeime $f_{a_0, 0}$ sind quasihomogen. Für die Funktionskeime $f_{a_0, 1}$ ist die Differenz zwischen Milnor- und Tjurinazahl eins.

Theorem 2

- (i) Das μ -Vereinfachungsverhalten der Funktionskeime f_{a_0, a_1} für die Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$ und $U_{1,0}$ ist unabhängig vom Parameter a_1 .
- (ii) Für die bimodularen Klassen $X = J_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$, $U_{1,0}$ und die uni- und bimodularen Klassen Y werden die möglichen Vereinfachungen $X \xrightarrow{\exists} Y$ und $X \xrightarrow{\forall} Y$ durch die Tabelle im Anhang A.2 beschrieben. Es gibt genau vier Fälle, in denen $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ gilt. Es sind dies die Fälle $(X, Y) = (W_{1,0}, E_{14})$; $(S_{1,0}, E_{13})$; $(U_{1,0}, T_{239})$; $(U_{1,0}, Z_{13})$
- (iii) Genauer gilt für die Abhängigkeit des Vereinfachungsverhaltens der Funktionskeime f_{a_0, a_1} vom Parameter a_0 in den vier Ausnahmefällen

$$W_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{14} :$$

$$f_{a_0, a_1} := x^4 + y^6 + a_0 x^2 y^3 + a_1 x^2 y^4, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } a_0^2 \neq 4$$

$$f_{a_0, a_1} \xrightarrow{\mu} E_{14} \iff a_0 = 0$$

$$S_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{13} :$$

$$f_{a_0, a_1} := x^2 z + y z^2 + y^5 + a_0 y^3 z + a_1 y^4 z, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } a_0^2 \neq 4$$

$$f_{a_0, a_1} \xrightarrow{\mu} E_{13} \iff a_0^2 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Es ist } f_{a_0, a_1} \sim_R f_{-a_0, -a_1}$$

$$U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{239} \quad \text{und} \quad U_{1,0} \xrightarrow{\exists} Z_{13} :$$

$$f_{a_0, a_1} := x^3 + x z^2 + x y^3 + a_0 z y^3 + a_1 z y^4, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } a_0(a_0^2 + 1) \neq 0$$

$$f_{a_0, a_1} \xrightarrow{\mu} T_{239} \iff a_0^2 = \frac{1}{3}$$

$$f_{a_0, a_1} \xrightarrow{\mu} Z_{13} \iff a_0^2 = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Es ist } f_{a_0, a_1} \sim_R f_{-a_0, -a_1}$$

Es gibt also Familien von quasihomogenen Funktionskeimen, deren Verhalten unter μ -Vereinfachung vom quasihomogenen Modulparameter abhängt. Dies war unseres Wissens bis jetzt noch nicht bekannt und verallgemeinert das folgende Beispiel von Pham ([Ph], zitiert nach [Be], 2.11):

Pham betrachtete die quasihomogene Familie

$$g_{a_0} := x^3 + y^9 + a_0 xy^6 \in J_{3,0} \quad \text{mit } a_0 \in \mathbb{C}, 4a_0^3 \neq -27$$

und zeigte:

Genau für $a_0 = 0$ existiert in jedem Repräsentanten einer semi-universellen Deformation von $(g_{a_0}^{-1}(0), 0)$ eine Faser, die sowohl eine E_6 als auch eine $E_8^{a_0}$ -Singularität besitzt.

Nach Theorem 1 ist das Verhalten der bimodularen exzeptionellen Singularitäten bei μ -Vereinfachung in die uni- und bimodularen Klassen unabhängig vom Modulparameter. Untersucht man Subordinationsprobleme, so tritt das von Pham beobachtete Phänomen auch bei den bimodularen exzeptionellen Klassen auf. Das folgende Beispiel haben wir der Arbeit von K. Wirthmüller ([Wi], 4.6) entnommen:

Eine Normalform für E_{18} ist

$$h_{a_0, a_1} := x^3 + y^{10} + a_0 xy^7 + a_1 xy^8, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C}$$

Genau für $a_0 = 0$ existiert in jedem Repräsentanten einer semi-universellen Deformation von $(h_{a_0, a_1}^{-1}(0), 0)$ eine Faser, die zwei E_8 -Singularitäten besitzt.

Sämtliche in den Theoremen 1 und 2 behaupteten Aussagen des Typs $X \xrightarrow{\exists} Y$ und fast alle Aussagen der Gestalt $X \xrightarrow{\forall} Y$ werden bis auf Transitivität durch Angabe holomorpher Familien f_t mit $f_0 \in X$, $f_t \in Y$ für $0 < |t| \ll 1$ bewiesen. Dabei sind insbesondere die Ausführungen in II.2.1.2, 2.4.4 und 2.4.5 zu beachten. Die benutzten Familien sind im Anhang A.5 zusammengefaßt.

Satz 3

Die in der Tabelle im Anhang A.5 aufgeführten Aussagen des Typs $X \xrightarrow{\exists} Y$ bzw. $X \xrightarrow{\forall} Y$ folgen aus den jeweils dort angegebenen Familien. Insbesondere folgen sämtliche in den Theoremen 1 und 2 behaupteten Vereinfachungen $f \xrightarrow{\mu} Y$ für quasihomogene bimodulare Funktionen f aus dieser Tabelle.

Jeder uni- oder bimodularen Singularitätenklasse Y aus Arnolds Liste haben wir die Isomorphieklasse des Milnorgitters $L(Y)$, das Spektrum $\text{Spec}(Y)$ sowie zwei spezielle Mengen $\mathcal{D}(Y)$ und $\mathcal{D}_S(Y)$ von Dynkindiagrammen zugeordnet. Wir haben in Kapitel II.2.3 die folgenden Relationen definiert:

$$L(Y) \longrightarrow L(X) \quad \Longleftrightarrow$$

Das Milnorgitter einer Singularität aus Y läßt sich primitiv in das Milnorgitter einer Singularität aus X einbetten.

$$\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y) \quad \Longleftrightarrow$$

Das Spektrum einer Singularität aus X vereinfacht sich in das Spektrum einer Singularität aus Y .

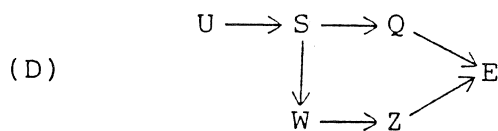
$$\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X) \quad \Longleftrightarrow$$

Es existiert eine Kette $Y = Y_1, \dots, Y_k = X$ uni- oder bimodularer Klassen, so daß für jedes j , $1 \leq j \leq k-1$, ein Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}(Y_j)$ existiert, das ohne Berücksichtigung der Bewertung Teilgraph eines Diagrammes aus $\mathcal{D}(Y_{j+1})$ ist.

$$\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X) \quad \Longleftrightarrow$$

Es existiert eine Kette $Y = Y_1, \dots, Y_k = X$ uni- oder bimodularer Klassen, so daß für $1 \leq j \leq k-1$ gilt:

- (i) Y_j, Y_{j+1} genügen den durch das Diagramm (D) beschriebenen notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Vereinfachung $Y_{j+1} \xrightarrow{\exists} Y_j$.
- (ii) In $\mathcal{D}_S(Y_j)$ existiert ein Diagramm, das Teilgraph eines Diagrammes aus $\mathcal{D}_S(Y_{j+1})$ ist.



Die Untersuchung der primitiven Einbettbarkeit der Milnorgitter, des Vereinfachungsverhaltens der Spektren sowie die Untersuchung der Halbordnungen $\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X)$ und $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$ ergab folgendes Ergebnis:

Theorem 4

- (i) Es sei X eine bimodulare exzeptionelle Klasse oder eine der Klassen

$$\begin{array}{llll}
 J_{3,i}, Z_{1,i}, Q_{2,i} & 0 \leq i \leq 4 & W_{1,i}^\#, S_{1,i}^\# & 1 \leq i \leq 3 \\
 W_{1,i}, S_{1,i} & 0 \leq i \leq 3 & U_{1,i} & 0 \leq i \leq 2
 \end{array}$$

und Y eine beliebige uni- oder bimodulare Klasse. Ferner sollen X, Y den durch das Diagramm (D) beschriebenen notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Vereinfachung $X \xrightarrow{\exists} Y$ genügen (vgl. II.2.1.1).

Die Relationen $L(Y) \longrightarrow L(X)$, $\mathcal{D}_S(Y) \leq_S \mathcal{D}_S(X)$, $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$ und $\text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y)$ werden durch die Tabellen im Anhang A.4 beschrieben.

- (ii) Ist X wie in (i) und Y eine beliebige uni- oder bimodulare Klasse, für die $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$ gilt, so genügen X, Y den durch das Diagramm (D) beschriebenen Bedingungen für die Existenz einer Vereinfachung $X \xrightarrow{\exists} Y$.

Der Vergleich von Theorem 4 mit den Ergebnissen aus Theorem 1 und 2 ergibt die beiden folgenden Korollare:

Korollar 5

Ist X eine bimodulare exzeptionelle Klasse oder eine der Klassen $J_{3,0}, Z_{1,0}, Q_{2,0}, W_{1,0}, S_{1,0}, U_{1,0}$ und Y eine beliebige uni- oder bimodulare Klasse, so gilt

$$X \xrightarrow{\exists} Y \implies \text{Spec}(X) \longrightarrow \text{Spec}(Y).$$

Die Vermutung von Arnold (siehe I.4.2) ist deshalb in den von uns untersuchten Fällen richtig.

Korollar 6 (Kombinatorische Beschreibung der Vereinfachungsergebnisse)

Es seien X, Y wie im vorangegangenen Korollar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $X \xrightarrow{\exists} Y$

(ii) Es gilt $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$, oder (X, Y) ist eines der Paare

$$(Z_{17}, T_{2\ 3\ 11}) ; (Z_{18}, T_{2\ 3\ 12}) ; (Z_{19}, T_{2\ 3\ 13})$$

$$(Q_{17}, T_{2\ 3\ 11})$$

$$(W_{17}, T_{2\ 3\ 11}) ; (W_{18}, T_{2\ 3\ 12})$$

$$(S_{16}, T_{2\ 4\ 9}) ; (S_{16}, T_{2\ 5\ 8}) ; (S_{17}, T_{2\ 5\ 9})$$

$$(U_{1,0}, T_{2\ 3\ 8}) ; (U_{1,0}, T_{2\ 3\ 9})$$

$$(U_{16}, T_{2\ 3\ 9}) ; (U_{16}, T_{2\ 4\ 9}) ; (U_{16}, E_{14}) .$$

Bemerkung:

Die von Laufer bewiesenen Ergebnisse (siehe Anhang A.3) über das Vereinfachungsverhalten der uni- und bimodularen Singularitäten lassen sich ebenfalls kombinatorisch beschreiben.

Diese Beobachtung geht auf W. Ebeling [Eb 2] zurück.

Satz:

Es seien X, Y beliebige uni- oder bimodulare Singularitätenklassen. Die zu X, Y gehörenden Flächensingularitäten sollen ferner minimale Auflösungen mit gleicher Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels haben. Dann gilt

$$X \xrightarrow{\exists} Y \iff \mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$$

E. Brieskorn ordnet in seiner Arbeit [Br 4] jeder isolierten Singularität $f \in \mathcal{M}(4k+3)$ ein Milnorgitter L zusammen mit einer Menge $\mathcal{B}^* \subset L^{\mu(f)}$ von ausgezeichneten Basen zu. Das Paar (L, \mathcal{B}^*) ist dabei bis auf Gitterisomorphie durch f eindeutig bestimmt. Brieskorn definiert nun die folgende Halbordnung

$$(L_1, \mathcal{B}_1^*) \approx (L_2, \mathcal{B}_2^*) \quad : \iff$$

Es existiert eine primitive Gittereinbettung $L_1 \longrightarrow L_2$, so daß sich jede Basis aus \mathcal{B}_1^* zu einer Basis aus \mathcal{B}_2^* ergänzen läßt.

Es bezeichne \mathcal{D}^* die Menge der Dynkindiagramme (mit Numerierung) zu den ausgezeichneten Basen aus \mathcal{B}^* . Die so definierte Menge \mathcal{D}^* stimmt mit der von uns in I.4.1.6 definierten Menge überein. Die Kenntnis von (L, \mathcal{B}^*) und \mathcal{D}^* ist äquivalent. Aus dem hierzu in [Br 4], Seite 157 gegebenen Beweis folgt

$$(L_1, \mathcal{B}_1^*) \approx (L_2, \mathcal{B}_2^*) \quad \iff$$

Es existiert ein Dynkindiagramm aus \mathcal{D}_1^* , das sich zu einem Diagramm aus \mathcal{D}_2^* ergänzen läßt.

Es sei X eine Klasse μ -homotoper Funktionen mit isolierter Singularität. Der Einfachheit halber sei $X \subset \mathcal{M}^2(4k+3)$. Wir wählen ein $f \in X$ und definieren

$$\mathcal{D}^*(X) := \mathcal{D}^*(f)$$

$$(L, \mathcal{B}^*)(X) := (L, \mathcal{B}^*)(f)$$

Nach I.4.1.9 ist $\mathcal{D}^*(X)$ und deshalb auch die Isomorphieklasse des Paares $(L, \mathcal{B}^*)(X)$ wohldefiniert.

Sind X, Y Singularitätenklassen aus Arnolds Liste, so gilt (siehe I.4.1.10)

$$X \xrightarrow{\exists} Y \quad \implies \quad (L, \mathcal{B}^*)(Y) \approx (L, \mathcal{B}^*)(X)$$

Die Untersuchung der einfachen und der unimodularen Singularitäten führte Brieskorn zu der in [Br 4] aufgestellten

Vermutung:

$$X \longrightarrow Y \quad \iff \quad (L, \mathcal{B}^*)(Y) \approx (L, \mathcal{B}^*)(X)$$

Dabei ist $X \longrightarrow Y$ eine geeignete Vereinfachungsrelation zwischen den Klassen X, Y aus Arnolds Klassifikation.

Das folgende Beispiel widerlegt jedoch diese Vermutung.

Satz 7

- (i) Keine Singularität aus $S_{1,1}^\#$ μ -vereinfacht sich in die Klasse E_{14} .
- (ii) Es existiert ein Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}^*(E_{14})$, das sich zu einem Diagramm aus $\mathcal{D}^*(S_{1,1}^\#)$ ergänzen läßt.

Bemerkung:

- (i) Die isolierten Hyperflächensingularitäten mit Milnorzahl ≤ 15 haben mit Ausnahme der Klasse $V_{1,0}$ die Modularität 0,1 oder 2 (Arnold [Ar 3]). Die Milnorgitter von $V_{1,0}$ und $S_{1,1}^\#$ haben gleichen Rang, aber verschiedene Diskriminante (Ebeling). Nach dem Beweis aus I.5.1 sind deshalb die Klassen E_{14} und $S_{1,1}^\#$ durch das Milnorgitter, also insbesondere durch die Invarianten $\mathcal{D}^*(E_{14})$ und $\mathcal{D}^*(S_{1,1}^\#)$ eindeutig bestimmt.
- (ii) Es gilt nach Laufer (siehe Tabelle im Anhang A.3) $U_{1,2} \xrightarrow{\exists} S_{1,1}^\#$. Deshalb läßt sich das obige Dynkindiagramm aus $\mathcal{D}^*(E_{14})$ auch zu einem Diagramm aus $\mathcal{D}^*(U_{1,2})$ ergänzen. Die Berechnung der Spektren ergibt $\text{Spec}(U_{1,2}) \xrightarrow{\not\rightarrow} \text{Spec}(E_{14})$. Es ist uns nicht bekannt, ob $U_{1,2} \xrightarrow{\exists} E_{14}$ gilt.

Beweis von Satz 7

(i) Ist $f \in S_{1,1}^\#$, so gilt für die Tjurinazahl (siehe I.3.4)

$$\tau(f) = \mu(f) - 2 = 13$$

Ist $g \in E_{14}$, so ist

$$\tau(g) = 13 \quad \text{oder} \quad \tau(g) = 14$$

Die Kontaktäquivalenzklasse von g ist durch $\tau(g)$ bestimmt. Mit der Halbstetigkeit der Tjurinazahl folgt dann aus den Sätzen in II.2.2.1 und I.2.4.3 $f \xrightarrow[\mu]{} g$.

(ii) Es sei \mathcal{B}^* die Menge der ausgezeichneten Basen eines Milnorgitters vom Rang k . Wir betrachten die wie folgt definierten Operationen $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ auf \mathcal{B}^* (vgl. I.4.1.5)

$$\alpha_i(\Delta_1, \dots, \Delta_k) := (\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, S_{\Delta_i}(\Delta_{i+1}), \Delta_i, \Delta_{i+2}, \dots, \Delta_k),$$

wobei $1 \leq i \leq k-1$, $(\Delta_1, \dots, \Delta_k) \in \mathcal{B}^*$ und

$$s_{\Delta_i}(x) = x + \langle x, \Delta_i \rangle \Delta_i$$

Es ist

$$\alpha_i^{-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_k) = (\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, s_{\Delta_{i+1}}(\Delta_i), \Delta_{i+2}, \dots, \Delta_k)$$

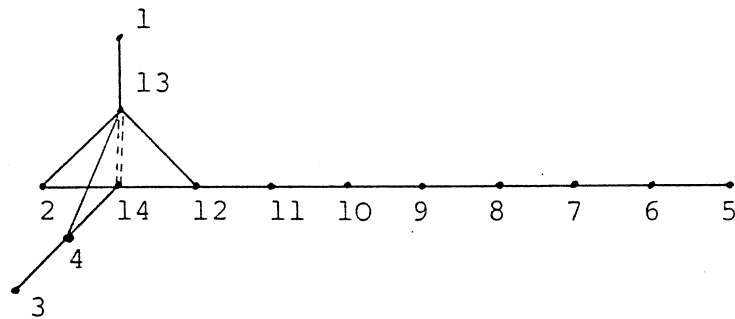
Für $1 \leq j \leq k$ gilt:

(*) Ist $(\Delta_1, \dots, \Delta_k) \in \mathcal{B}^*$, so existiert ein $\tilde{\Delta}$ mit $(\Delta_1, \dots, \Delta_{j-1}, \Delta_{j+1}, \dots, \Delta_k, \tilde{\Delta}) \in \mathcal{B}^*$.

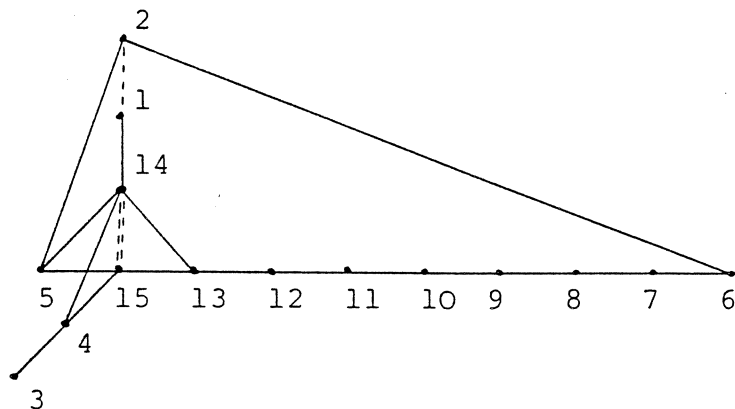
Für den Beweis von (*) wendet man $\alpha_j^{-1}, \dots, \alpha_{k-1}^{-1}$ an.

Die beiden folgenden Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen für E_{14} und $S_{1,1}^\#$ haben wir der Arbeit [Eb 3] von W. Ebeling entnommen.

E_{14}



$S_{1,1}^\#$



Wendet man auf das Diagramm von $S_{1,1}^\#$ die von α_4, α_3 induzierten Transformationen an, so bewirken sie die Umnummerierung

$$5 \mapsto 3 \quad ; \quad 4 \mapsto 5 \quad ; \quad 3 \mapsto 4$$

Aus (*) mit $j = 2, k = 15$ folgt dann die Behauptung. □

KAPITEL IV METHODEN

IV.1 Primitive Einbettungen von Milnorgittern

Vereinfacht sich eine Singularität X in eine Singularität Y , so bettet das Milnorgitter von Y primitiv in das Milnorgitter von X ein. Mittels der Theorie der Diskriminantenformen ganzzahliger gerader quadratischer Formen läßt sich in den von uns zu untersuchenden Fällen leicht entscheiden, ob die Milnorgitter primitiv einbettbar sind. Die Technik der Untersuchung von Gittern mit Hilfe ihrer Diskriminantenformen wurde von C.T.C Wall und A. Durfee entwickelt und von V.V. Nikulin [Ni] vervollkommnet.

Wir orientieren uns in diesem Kapitel hauptsächlich an der Arbeit von Nikulin [Ni]. Wir stellen im ersten Abschnitt einige grundlegende Begriffe und Eigenschaften der Theorie der Gitter und Diskriminantenformen zusammen. Die von Gabriellov und Ebeling gegebene Beschreibung der Milnorgitter von Singularitäten der Modularität kleiner oder gleich zwei benutzen wir im zweiten Abschnitt, um die Diskriminantenformen dieser Gitter zu bestimmen. In den Abschnitten 2 bis 6 wird die Methode, die primitive Einbettbarkeit von Gittern mit Hilfe ihrer Diskriminantenformen und Signaturen zu untersuchen, entwickelt. Dies wenden wir dann in Kapitel V.1 auf die von uns zu untersuchenden Fälle an. Die Ergebnisse sind in den Tabellen A.4 (Anhang) zusammengefaßt.

IV.1.1 Ganzzahlige Gitter und Diskriminantenformen

1.1.1 Einige grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Theorie der geraden Gitter

Die in diesem Abschnitt verwendeten Begriffe und Sätze finden sich z.B. in Lang [Lan] (Ch.XIV: Modul, Bilinearform), van der Waerden [v.d.W] (§84: Modul, Elementarteilersatz) und in Serre [Se] (Ch.II: p-adische Zahlen).

Bezeichnungen:

$$C_p := \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$$

\mathbb{Z}_p : ganze p-adische Zahlen

\mathbb{Q}_p : der Quotientenkörper von \mathbb{Z}_p

Sei A im folgenden stets ein Integritätsbereich mit $\text{char}(A) \neq 2$ und $k := \text{Quot}(A)$ sein Quotientenkörper. Unter einem A-Gitter (S, b) vom Rang r verstehen wir stets einen endlich erzeugten freien A-Modul S vom Rang r, versehen mit einer symmetrischen Bilinearform

$$b: S \times S \longrightarrow A$$

Das Gitter (S, b) heißt gerade, wenn gilt:

$$b(x, x) \in 2A \quad \text{für alle } x \in S$$

Sei $S^\# := \text{Hom}_A(S, A)$, so heißt

$$\phi: S \longrightarrow S^\# \quad \text{mit } x \longmapsto b(x, \cdot)$$

die zu b assoziierte Abbildung. Für einen Untermodul $H \subset S$ sei

$$H^\perp := \{x \in S \mid b(x, H) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{rad } S := S^\perp$$

das Radikal von S. (S, b) heißt nicht ausgeartet, wenn $\det \phi \neq 0$ und nicht singulär, wenn $\det \phi \in A^*$. Nicht singuläre Gitter über \mathbb{Z} oder \mathbb{Z}_p heißen unimodular.

Seien $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ bzw. $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ Basen von S über A und $B := [b(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ bzw. $B' := [b(e'_i, e'_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ die Matrixdarstellungen der Bilinearform b bezüglich dieser Basen. Ist L die Basis des Basiswechsels, so gilt: $\det L \in A^*$ und $B' = L B L^t$. Deshalb ist

$$\text{disk}(S, b) := \det B \text{ mod } (A^*)^2,$$

die Diskriminante von (S, b) , eine Gitterinvariante.

Mit (s_+, s_-, s_0) bezeichnen wir die Signatur eines \mathbb{Z} -Gitters (S, b) . Ist $s_0 = 0$, d.h. ist (S, b) nicht ausgeartet, so schreiben wir kurz: (s_+, s_-) .

Läßt sich S als Modul in eine direkte Summe zerlegen (d.h. $S = S_1 \oplus S_2$) und gilt: $b(S_1, S_2) = 0$, so heißt $S_1 \perp S_2$ eine orthogonale Zerlegung von S .

1.1.2 Diskriminantenformen

Im folgenden orientieren wir uns an der Arbeit von Nikulin [Ni]. Sei nun $A = \mathbb{Z}$ (oder \mathbb{Z}_p) und (S, b) ein nicht ausgeartetes Gitter mit Rang n und Basis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$; ϕ sei die oben definierte assoziierte Abbildung. Dann kommutiert folgendes Diagramm ($k := \text{Quot}(A)$):

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\phi} & S^\# = \text{Hom}_A(S, A) & \xrightarrow{\pi} & S^\# / \phi(S) \\ i_S \downarrow & & \downarrow i_{S^\#} & & \\ S \otimes k & \xrightarrow{\phi \otimes \text{id}_k} & S^\# \otimes k \cong \text{Hom}_k(S \otimes k, k) & & \end{array}$$

$i_S, i_{S^\#}$ sind die Einbettungen der Gitter in die zugehörigen Vektorräume. Es sei $(e_i^\#)_{1 \leq i \leq n}$ die zu $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ duale Basis von $S^\#$, d.h.

$$e_i^\#(e_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Ist $B := [b(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ die zu b bezüglich $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ gehörige Matrix, so gilt:

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^n B_{ij} e_j^\#, \quad e_i^\# = \sum_{j=1}^n (B^{-1})_{ij} \phi(e_j) \quad (\text{in } S^\# \otimes k)$$

Satz:

$G_S := S^\# / \phi(S)$ ist für $A = \mathbb{Z}$ eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $|G_S| = |\text{disk}(S, b)|$ und für $A = \mathbb{Z}_p$ eine endliche abelsche p -Gruppe der Ordnung p^r , wenn gilt:
 $\text{disk}(S, b) = p^r \text{ mod } \mathbb{Z}_p^*$.

Beweis: Sei $\text{rg } S = n$. Da ϕ injektiv ist, existieren nach dem Elementarteilersatz Basen f_1, \dots, f_n von S , g_1, \dots, g_n von

$S^\#$ und $a_1, \dots, a_n \in A \setminus \{0\}$ mit $\phi(f_i) = a_i g_i$ ($1 \leq i \leq n$) und $\text{disk}(S, b) = \det \phi = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \pmod{A^*}$. Wir können annehmen, daß für $A = \mathbb{Z}$ $a_i \in \mathbb{N}$ und für $A = \mathbb{Z}_p$ $a_i = p^{r_i}$ mit $r_i \in \mathbb{N}$ gilt. Also gilt:

$$G_S = S^\# / \phi(S) \cong \bigoplus_{i=1}^n A / (a_i)$$

Das bedeutet im Fall $A = \mathbb{Z}$:

$$G_S \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} / (a_i) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} / a_i \mathbb{Z} = \bigoplus_{i=1}^n C_{a_i}$$

und im Fall $A = \mathbb{Z}_p$

$$G_S \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p / (a_i) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p / p^{r_i} \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{i=1}^n C_{p^{r_i}} \quad \left(\sum_{i=1}^n r_i = r \right) \quad \square$$

Bemerkung: Sei S ein nicht ausgeartetes \mathbb{Z} -Gitter. Der Beweis des Satzes zeigt, daß $G_{S \otimes \mathbb{Z}_p} = (G_S)_p$ ist, wobei $(G_S)_p$ die p -Primärkomponente der Gruppe G_S bezeichne.

Unser Ziel ist nun, mittels der Bilinearform b auf S die Gruppe G_S mit einer zusätzlichen Struktur zu versehen:

Definition:

Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Eine endliche symmetrische Bilinearform ist eine symmetrische Bilinearform

$$b: G \times G \longrightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

auf der endlichen Gruppe G . Eine endliche quadratische Form ist eine Abbildung

$$q: G \longrightarrow \mathbb{Q} / 2\mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- a) $q(nx) = n^2 q(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für alle $x \in G$
- b) $q(x+y) - q(x) - q(y) \equiv 2b(x,y) \pmod{2\mathbb{Z}}$,

wobei $b: G \times G \longrightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$ eine endliche symmetrische Bilinearform ist. Sie heißt die Bilinearform zu q und ist durch die quadratische Form eindeutig bestimmt.

Eine endliche quadratische Form heißt nicht ausgeartet, wenn b nicht ausgeartet ist; d.h.: ist $b(x,y) = 0$ für alle $x \in G$, so ist $y = 0$.

Orthogonalität und direkte Summen werden für endliche quadratische Formen definiert wie bei Gittern.

Ist $G = \bigoplus_{i=1}^r C_i$ als Summe zyklischer Gruppen gegeben und sind e_1, \dots, e_r die kanonischen Erzeugenden, so kann eine endliche quadratische Form auf G durch eine rationale $r \times r$ -Matrix $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ mit $q(e_i) =: b_{ii} \pmod{2\mathbb{Z}}$ und $b(e_i, e_j) =: b_{ij} \pmod{\mathbb{Z}}$ beschrieben werden. 0 bezeichne die quadratische Form auf der trivialen Gruppe $\{0\}$.

Für die endliche Gruppe G_S soll nun eine endliche quadratische Form konstruiert werden.

Zu diesem Zweck setzen wir die Bilinearform b auf S vermöge der Einbettung $\phi: S \hookrightarrow S^\#$ zu einer symmetrischen Bilinearform $b_S^\#$ auf $S^\# \times S^\#$ fort:

$$b_S^\#: S^\# \times S^\# \longrightarrow k \quad (:= \text{Quot}(A))$$

Die Verträglichkeitsbedingung $b_S^\# \circ \phi = b_S$ liefert dann:

$$B^\# = B^{-1} \quad \text{wenn } B = (b_S(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{und} \\ B^\# = (b_S^\#(e_i^\#, e_j^\#))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{ist.}$$

Nun definieren wir eine endliche symmetrische Bilinearform

$$\bar{b}_S^\#: G_S \times G_S \longrightarrow k/A \quad \text{durch}$$

$$\bar{b}_S^\#(x + S, y + S) := b_S^\#(x, y) \pmod{A}$$

und, wenn (S, b) ein gerades Gitter ist (für $p \neq 2$ ist jedes \mathbb{Z}_p -Gitter gerade), eine endliche quadratische Form

$$\bar{q}_S^\#: G_S \longrightarrow k/2A \quad \text{durch}$$

$$\bar{q}_S^\#(x + S) := b_S^\#(x, x) \pmod{2A}$$

Definition:

Ist (S, b) ein nicht ausgeartetes Gitter über \mathbb{Z} bzw. \mathbb{Z}_p , so heißt $(G_S, \bar{b}_S^\#)$ die Diskriminantenbilinearform von (S, b)

und, wenn (S,b) überdies ein gerades Gitter ist, $(G_S, \bar{q}_S^\#)$ die Diskriminantenform von (S,b) .

Ist (S,b) ein gerades, aber ausgeartetes Gitter, so bezeichnen wir mit $(G_S, \bar{q}_S^\#)$ die Diskriminantenform des geraden, nicht ausgearteten Gitters $(S/\text{rad } S, b)$.

Wir schreiben im folgenden, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, für $\bar{b}_S^\#$ bzw. $\bar{q}_S^\#$ einfach $b_S^\#$ bzw. $q_S^\#$ oder auch b_S bzw. q_S und S statt (S,b) .

Bemerkung:

- a) Wenn S nicht ausgeartet ist, so ist (G_S, b_S) eine nicht ausgeartete Bilinearform.
- b) Ist S unimodular, so ist $G_S = \{0\}$.

Im folgenden fassen wir die uns vornehmlich interessierenden Invarianten eines geraden Gitters S in dem Tupel (s_+, s_-, s_0, q_S) bzw., falls $s_0 = 0$ ist, im Tupel (s_+, s_-, q_S) zusammen.

1.1.3 Klassifikation der Diskriminantenformen

Als nächstes untersuchen wir die orthogonale Zerlegbarkeit endlicher quadratischer Formen in irreduzible Komponenten. Sei (G,q) eine endliche Form. G läßt sich schreiben als direkte Summe ihrer p -Primärkomponenten G_p :

$$G = \bigoplus_{p \text{ prim}} G_p$$

Dabei sind die Gruppen G_p direkte Summen von zyklischen Gruppen, deren Ordnung eine Potenz von p ist.

Mit $\lambda(G)$ bezeichnen wir die minimale Anzahl der Erzeugenden einer endlichen abelschen Gruppe G . Es gilt:

$$\lambda(G) = \max_p \lambda(G_p)$$

Ebenso kann man \mathbb{Q}/\mathbb{Z} bzw. $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ in Primärkomponenten zerlegen:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbb{Q} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Q}^{(2)} / 2\mathbb{Z} \oplus \left[\bigoplus_{\substack{p \neq 2 \\ p \text{ prim}}} 2\mathbb{Q}^{(p)} / 2\mathbb{Z} \right], \text{ wobei}$$

$\mathbb{Q}^{(p)} := \{ x \in \mathbb{Q} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{z}{p^k} \}$ ist.

Sei nun $b_p := b \mid_{G_p}$ und $q_p := q \mid_{G_p}$. Der Wert der endlichen Form b_p (q_p) auf dem p -primären Anteil von G liegt in der p -Komponente von \mathbb{Q} / \mathbb{Z} ($\mathbb{Q} / 2\mathbb{Z}$). Deshalb gilt:

$$b = \prod_{p \text{ prim}} b_p \text{ bzw. } q = \prod_{p \text{ prim}} q_p$$

Bemerkung: Für $p \neq 2$ ist q_p bereits durch b_p eindeutig bestimmt.

Bereits früher war gezeigt worden, daß für nicht ausgeartete ganze Gitter S gilt:

$$G_{S \otimes \mathbb{Z}_p} = (G_S)_p$$

Beachtet man dies und neben der Zerlegbarkeit endlicher Formen in Primärkomponenten noch die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{(p)} / \mathbb{Z} &\cong \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \text{ und} \\ \mathbb{Q}^{(2)} / 2\mathbb{Z} &\cong \mathbb{Q}_2 / 2\mathbb{Z}_2 \text{ bzw. } 2\mathbb{Q}^{(p)} / 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \text{ (} p > 2 \text{),} \end{aligned}$$

so erhält man: $b_S = \bigoplus_{p \text{ prim}} b_{S \otimes \mathbb{Z}_p}$ bzw.

$$q_S = \bigoplus_{p \text{ prim}} q_{S \otimes \mathbb{Z}_p}$$

Im folgenden betrachten wir nur noch gerade, nicht ausgeartete Gitter und nicht ausgeartete quadratische Formen. Für quadratische Formen definiert man wie üblich "irreduzible Formen" bezüglich der Zerlegbarkeit in orthogonale Summanden. Für nicht ausgeartete quadratische Formen (G, q) lassen sich die p -Primärkomponenten (G_p, q_p) in irreduzible Komponenten zerlegen. Diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Wir definieren nun irreduzible quadratische Formen $w_{p,k}^\epsilon$, u_k und v_k . Dabei verwenden wir die Bezeichnungen aus [Br 3].

Definition:

(i) Es sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

$w_{p,k}^\epsilon$ ist die quadratische Form q auf $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ mit

$$q(1) \equiv a p^{-k} \pmod{2\mathbb{Z}},$$

wobei a die kleinste positive ganze, gerade Zahl ist, die im Fall $\epsilon = 1$ ein quadratischer Rest bzw. im Fall $\epsilon = -1$ kein quadratischer Rest modulo p ist.

(ii) Für $\epsilon = \pm 1$ ist $w_{2,1}^\epsilon$ die quadratische Form q auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit

$$q(1) \equiv \frac{\epsilon}{2} \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

Für $\epsilon \in \{\pm 1, \pm 5\}$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ ist $w_{2,k}^\epsilon$ die quadratische Form q auf $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ mit

$$q(1) \equiv \frac{\epsilon}{2^k} \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

(iii) Auf $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ ($k \geq 1$) definieren wir zwei Formen u_k und v_k durch die Angabe ihrer Matrizen bezüglich der Standardbasen $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. Die Matrizen sind für

$$u_k: \quad 2^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_k: \quad 2^{-k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Werte dieser Formen für $x e_1 + y e_2$ sind also:

$$u_k(x e_1 + y e_2) \equiv 2^{-k+1} x y \pmod{2\mathbb{Z}}$$

$$v_k(x e_1 + y e_2) \equiv 2^{-k+1} (x^2 + x y + y^2) \pmod{2\mathbb{Z}}$$

Bemerkung ([Br 3]):

Es sei $G = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl sei. Mit G^* bezeichnen wir die Erzeugenden von G . Dann gilt:

- (i) Sei $p \neq 2$. Ist q eine endliche, nicht ausgeartete quadratische Form auf G , so induziert q nach Multiplikation mit p^k eine Abbildung

$$Q: G \longrightarrow \mathbb{Z} / p \mathbb{Z}.$$

$Q(G^*)$ ist dann eine der beiden Nebenklassen von

$$(\mathbb{Z} / p \mathbb{Z})^{*2} \text{ in } (\mathbb{Z} / p \mathbb{Z})^*.$$

Ist $Q(G^*) = (\mathbb{Z} / p \mathbb{Z})^{*2}$, so ist $q \cong w_{p,k}^1$. Im anderen Fall ist $q \cong w_{p,k}^{-1}$. Die Entscheidung erfolgt durch Berechnung des Legendre-Symbols $(\frac{a}{p})$, wobei sich a durch $q(x) = \frac{a}{p} \pmod{2\mathbb{Z}}$ für einen Erzeuger $x \in G^*$ bestimmt.

- (ii) Sei nun $p = 2$. Jede nicht ausgeartete quadratische Form

$$Q: G \longrightarrow \mathbb{Q} / 2 \mathbb{Z}$$

induziert nach Multiplikation mit 2^k eine Abbildung

$$Q: G \longrightarrow \mathbb{Z} / 4 \mathbb{Z}, \text{ falls } k = 1, \text{ und}$$

$$Q: G \longrightarrow \mathbb{Z} / 8 \mathbb{Z}, \text{ falls } k > 1.$$

Es ist $Q(G^*)$ ein Element von $(\mathbb{Z} / 4 \mathbb{Z})^* = \{\pm 1\}$ bzw. $(\mathbb{Z} / 8 \mathbb{Z})^* = \{\pm 1, \pm 5\}$. Zwei derartige Formen sind genau dann isomorph, wenn für sie $Q(G^*)$ gleich ist.

Satz 1:

- (i) Die nicht trivialen, nicht ausgearteten irreduziblen quadratischen Formen sind bis auf Isomorphie die Formen u_k, v_k und $w_{p,k}^\epsilon$ ($k \geq 1, p$ prim, $\epsilon \in \{\pm 1\}$).
- (ii) Jede nicht ausgeartete, endliche quadratische Form ist isomorph zu einer orthogonalen direkten Summe der Formen u_k, v_k und $w_{p,k}^\epsilon$.
- (iii) Eine solche orthogonale direkte Summe ist im allgemeinen nicht eindeutig. Es bestehen folgende Isomorphierelationen:

a) $w_{p,k}^\epsilon \perp w_{p,k}^\epsilon \cong w_{p,k}^\eta \perp w_{p,k}^\eta \quad (p \neq 2)$

b) $u_k \perp u_k \cong v_k \perp v_k$

- c) $w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\eta \cong w_{2,k}^{5\epsilon} \perp w_{2,k}^{5\eta}$
- d) $v_k \perp w_{2,k}^{-5\eta} \cong w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\eta \quad \eta \equiv \epsilon(4)$
 $u_k \perp w_{2,k}^{-\eta} \cong w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\eta \quad \eta \equiv -\epsilon(4)$
- e) $v_k \perp w_{2,k+1}^\epsilon \cong u_k \perp w_{2,k+1}^{5\epsilon}$
- f) $v_{k+1} \perp w_{2,k}^\epsilon \cong u_{k+1} \perp w_{2,k}^{5\epsilon}$
- g) $w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k+1}^\eta \cong w_{2,k}^{\epsilon+2\eta} \perp w_{2,k+1}^{5(\eta-2\epsilon)}$
- h) $w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k+2}^\eta \cong w_{2,k}^{5\epsilon} \perp w_{2,k+2}^{5\eta}$

Dabei seien im Fall $p=2$ ϵ und η für $k=1$ aus $C_4^* = \{\pm 1\}$ und für $k>1$ aus $C_8^* = \{\pm 1, \pm 5\}$. Alle Ausdrücke r in $w_{2,1}^r$ werden modulo 4 und in $w_{2,k}^r$ ($k>1$) modulo 8 berechnet.

Es bezeichne (Qu, \perp) die Halbgruppe der nicht ausgearteten geraden Gitter, (qu, \perp) die Halbgruppe der nicht ausgearteten Formen. Man hat einen Homomorphismus

$$q: (Qu, \perp) \longrightarrow (qu, \perp)$$

$$S \longmapsto q_S$$

Sei $S \in (Qu, \perp)$ mit Signatur (s_+, s_-) . Wir definieren das Signum von S ($\text{sign } S$) durch

$$\text{sign}: (Qu, \perp) \longrightarrow (\mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}, +)$$

$$S \longmapsto \text{sign } S := s_+ - s_- \pmod{8}$$

sign ist ein Homomorphismus. Für unimodulare Gitter gilt:

$$\text{sign } S \equiv 0(8)$$

Es gilt nun folgender

Satz 2 (Nikulin [Ni], Th. 1.3.3):

Es gibt genau einen Homomorphismus $(qu \longrightarrow \mathbb{Z} / 8\mathbb{Z})$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 Qu & \xrightarrow{\text{sign}} & \mathbb{Z} / 8\mathbb{Z} \\
 q \downarrow & \searrow & \uparrow \\
 qu & &
 \end{array}$$

Die so definierte Abbildung nennen wir ebenfalls sign .

Satz 3 (Nikulin [Ni], Th. 1.11.3):

Es seien die zu gegebenen endlichen quadratischen Formen q_1, q_2 gehörenden Bilinearformen isomorph. Dann gilt:

$$q_1 \cong q_2 \iff \text{sign } q_1 \equiv \text{sign } q_2 \quad (8)$$

Satz 4 (Nikulin [Ni], Th. 1.11.2*)

Für das Signum einer nicht ausgearteten, endlichen, irreduziblen quadratischen Form gilt ($\ell \geq 1$):

$$\begin{aligned} p \neq 2 & \quad \text{sign } w_{p, 2\ell}^{\pm 1} \equiv 0 \\ & \quad \text{sign } w_{p, 2\ell-1}^1 \equiv 1 - p \\ & \quad \text{sign } w_{p, 2\ell-1}^{-1} \equiv 5 - p \\ p = 2 & \quad \text{sign } w_{2, \ell}^{\pm 1} \equiv \pm 1 \\ & \quad \text{sign } w_{2, 2\ell}^{\pm 5} \equiv \pm 5 \\ & \quad \text{sign } w_{2, 2\ell+1}^{\pm 5} \equiv \pm 1 \\ & \quad \text{sign } u_\ell \equiv 0 \\ & \quad \text{sign } v_\ell \equiv 4\ell \end{aligned}$$

In den folgenden Fällen (vgl. Ebeling [Eb 2], Satz 2.2.2) lassen sich die Diskriminantenformen von geraden \mathbb{Z} -Gittern allein aus den Invarianten Diskriminante und Signatur bestimmen:

Satz 5:

Es sei S ein nicht ausgeartetes, gerades \mathbb{Z} -Gitter. Erfüllt S eine der folgenden Bedingungen (p prim)

- (i) $|\text{disk}(S)| = p$
- (ii) $|\text{disk}(S)| = 2p, p \neq 2$
- (iii) $|\text{disk}(S)| = p^2$ und $\text{sign}(S) \neq 0(8)$,

so ist (G_S, q_S) eindeutig durch $\text{disk}(S)$ und $\text{sign}(S)$ bestimmt. (Satz 5 folgt aus Satz 4).

IV.1.2 Die Invarianten (s_+, s_-, s_0, q) eines Milnorgitters

Sei X eine Klasse μ -homotoper isolierter Hyperflächensingularitäten. Wir bezeichnen mit $L(X)$ das zugehörige Milnorgitter, mit (s_+, s_-, s_0) dessen Signatur. Da $L(X)$ gerade ist, ist die Diskriminantenform q_X von $L(X) / \text{rad } L(X)$ wohldefiniert.

Satz ([Ni], Th. 2.2.2):

Ein Milnorgitter $L(X)$ ist durch seine Invarianten (s_+, s_-, s_0, q_X) eindeutig bestimmt.

Ist das Milnorgitter $L(X)$ nicht definit, so ist jedes Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, s_0, q_X) zu $L(X)$ isomorph (d.h. das Geschlecht von $L(X)$ enthält nur eine Klasse, vgl. 1.3).

Für die Singularitäten der Modularität höchstens zwei sollen nun die Diskriminantenformen berechnet und für niedrige Milnorzahl in irreduzible Komponenten zerlegt werden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen des Anhangs A.6 enthalten. Dabei verwenden wir Daten aus den Tabellen 3 und 4 in [Eb 2] (pp 484 und pp 492). In der Tabelle 3 finden wir neben der Modularität und der Milnorzahl für alle von Arnold in [Ar 3] klassifizierte Singularitäten (mit Ausnahme der Serie V) die Invarianten s_+, s_0 sowie die Diskriminante ihrer Milnorgitter. Ferner werden dort die Milnorgitter als orthogonale Summanden der folgenden Gitter dargestellt:

- der negativ definiten Gitter A_k, D_k, E_k (Es ist nicht üblich, die einfachen Singularitäten A_k, D_k, E_k und ihre Milnorgitter in der Notation zu unterscheiden.),
- der in ([Eb 2], pp 473) definierten Gittern M_{pqr}^{stu} ,
- der hyperbolischen Ebene $U = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$,
- des eindimensionalen isotropen Gitters $(0) = (\mathbb{Z}, (0))$.

Erinnerung:

Wird ein Gitter (S, b) bezüglich einer Basis e_1, \dots, e_n durch eine Matrix $B = (b(e_i, e_j))$ beschrieben, so gilt:

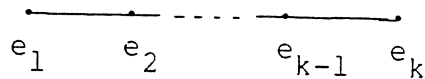
$$e_i^\# = \sum_{j=1}^n (B^{-1})_{ij} \phi(e_j) \quad \text{und}$$

$$b^\#(e_i^\#, e_j^\#) = (B^{-1})_{ij}.$$

Dabei bezeichne $\phi: S \longrightarrow S^\#$ die zu b assoziierte Abbildung.

A_k ($k \geq 1$): $q_{A_k} \cong (C_{k+1}, (-\frac{k}{k+1}))$

Beweis: A_k hat das Dynkindiagramm



Aus dem Gleichungssystem

$$e_1^\#(e_j) = \sum_{\ell=1}^k \beta_{1\ell} b(e_1, e_\ell) = \delta_{1j} \quad (1 \leq j \leq k)$$

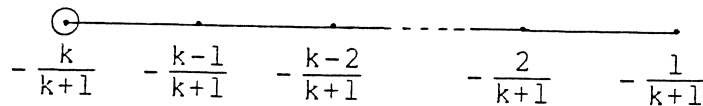
erhalten wir:

$$e_1^\# = -\frac{1}{k+1} \sum_{\ell=1}^k (k+1-\ell) \phi(e_\ell), \quad \text{also}$$

$$\beta_{1\ell} = (B^{-1})_{1\ell} = -\frac{k+1-\ell}{k+1}.$$

Dies notieren wir im Dynkindiagramm wie folgt:

Durch \odot markieren wir den Punkt des Basisvektors e_i , dessen Duales wir berechnet haben, und bewerten die Punkte des Graphen mit $(B^{-1})_{i\ell}$:



$e_1^\#$ repräsentiert ein Element der Ordnung $k+1$ in G_{A_k} , denn für $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$r e_1^\# \in \phi(A_k) \iff \frac{r}{k+1} \in \mathbb{Z}.$$

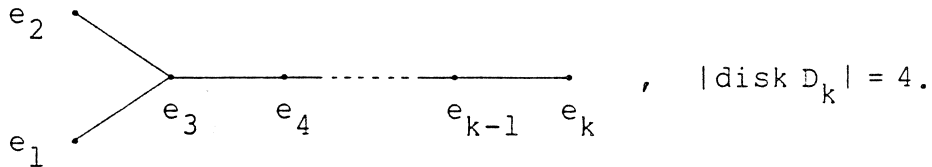
Da $|\text{disk } A_k| = k+1$, erzeugt $e_1^\#$ die Gruppe und es ist $G_{A_k} = C_{k+1}$.

Mit $b^\#(e_1^\#, e_1^\#) = (B^{-1})_{11} = -\frac{k}{k+1}$ folgt die Behauptung. \square

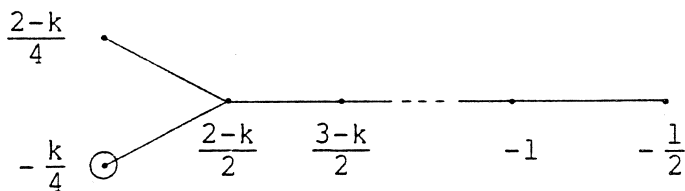
D_k ($k \geq 4$):

$$q_{D_k} \cong \begin{cases} w_{2,2}^{-1} & \text{für } k \equiv 1(8) \\ w_{2,2}^5 & \text{für } k \equiv 3(8) \\ w_{2,2}^{-5} & \text{für } k \equiv 5(8) \\ w_{2,2}^1 & \text{für } k \equiv 7(8) \end{cases} \quad q_{D_k} \cong \begin{cases} u_1 & \text{für } k \equiv 0(8) \\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} & \text{für } k \equiv 2(8) \\ v_1 & \text{für } k \equiv 4(8) \\ w_{2,1}^1 \perp w_{2,1}^1 & \text{für } k \equiv 6(8) \end{cases}$$

Beweis: D_k hat das Dynkindiagramm



$e_1^\#$ wird durch den bewerteten Graphen



beschrieben. Analoges gilt für $e_2^\#$.

Für $k \in 2\mathbb{N} + 1$ folgt: $e_1^\#$ erzeugt die Gruppe, also ist

$G_{D_k} = C_4$. Es ist $b^\#(e_1^\#, e_1^\#) = -\frac{k}{4}$.

Für $k \in 2\mathbb{N}$ folgt: $e_1^\#, e_2^\#, e_1^\# - e_2^\# \notin \phi(D_k)$. Also erzeugen $e_1^\#$ und $e_2^\#$ die Gruppe $G_{D_k} \cong C_2 \otimes C_2$. Wir erhalten

$$q_{D_k} = (C_2 \otimes C_2, \begin{bmatrix} -\frac{k}{4} & \frac{2-k}{4} \\ \frac{2-k}{4} & -\frac{k}{4} \end{bmatrix}).$$

Bemerkung: Außer für $k \equiv 0(8)$ folgt das Ergebnis auch sofort mit Satz 5 aus 1.1.3.

$$E_6: \quad q_{E_6} \cong w_{3,1}^{-1}$$

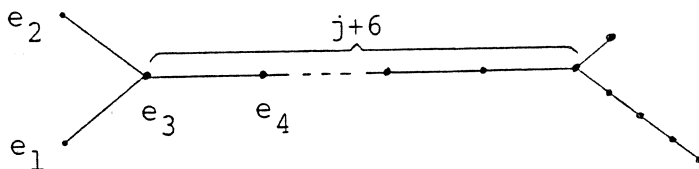
$$E_7: \quad q_{E_7} \cong w_{2,1}^1$$

$$E_8: \quad q_{E_8} \cong 0$$

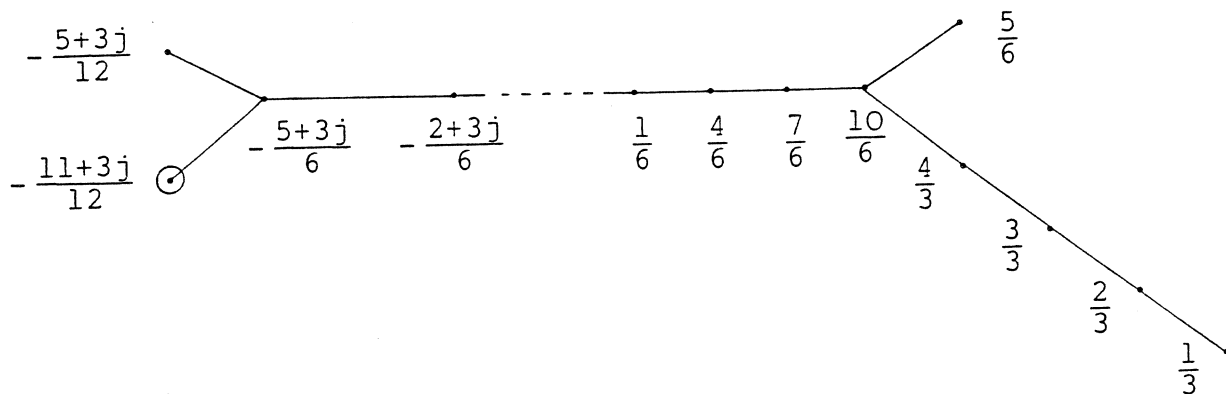
Beweis: Da $|\text{disk } E_6| = 3$, $|\text{disk } E_7| = 2$ und $|\text{disk } E_8| = 1$ ist und die Gitter negativ definit vom Rang 6, 7 bzw. 8 sind, folgt die Behauptung aus 1.1.3, Satz 5. \square

$$W_{1,j} \ (j \geq 0): \quad q_{W_{1,j}} \cong q_{D_{9+j}} \perp w_{3,1}^1$$

Beweis: Nach [Eb 2], Korollar 1 und Tabelle 4 (pp 491) gilt: $L(W_{1,j}) = M_j \perp U$, wobei M_j ein Gitter mit Signatur $(1, 12+j)$ und der Diskriminante $(-1)^j 12$ ist, das durch das Diagramm



beschrieben wird. $e_1^\#$ wird durch den Graphen



beschrieben.

Also erzeugen $e_1^\#$ und $e_2^\#$ $M_j^\# / M_j$. Es ist $G_{W_{1,j}} = G_{M_j} = C_3 \oplus G$, wobei G eine Gruppe der Ordnung vier ist.

$$\text{Aus} \quad b^\#(3e_k^\#, 3e_k^\#) \equiv -\frac{33}{4} - \frac{9}{4}j \equiv -\frac{9+j}{4} \pmod{2\mathbb{Z}}, \quad k \in \{1, 2\}$$

$$\text{und} \quad b^\#(3e_1^\#, 3e_2^\#) \equiv -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}j \equiv \frac{2-9+j}{4} \pmod{2\mathbb{Z}}$$

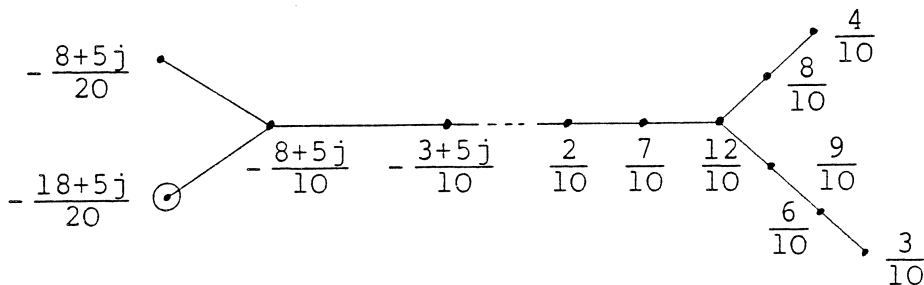
ersehen wir: $q_{D_{9+j}}$ ist die Form auf G .

Aus Signaturgründen folgt: $w_{3,1}^1$ ist die Form auf C_3 . \square

Bemerkung: Nach dem Satz zu Beginn dieses Abschnittes hat $L(W_{1,j})$ also die orthogonale Zerlegung $A_2 \perp D_{9+j} \perp U \perp U$.

$$\underline{S_{1,j}} \ (j \geq 0): \quad q_{S_{1,j}} \cong q_{D_{10+j}} \perp w_{5,1}^{-1}$$

Der Beweis erfolgt wie im Fall $W_{1,j}$: Es ist $L(S_{1,j}) = M_j \perp U$, wobei M_j ein Gitter der Signatur $(1, 11+j)$ mit Diskriminante $(-1)^{j+1} 20$ bezeichnet. M_j wird wieder durch ein Dynkin diagramm beschrieben. Dieses beschreibt $e_1^\#$, wenn man es wie folgt bewertet:



Ferner ist

$$b^\#(5e_k^\#, 5e_k^\#) \equiv -\frac{45}{2} - \frac{25}{4}j \equiv -\frac{10+j}{4} \pmod{2\mathbb{Z}} \quad k \in \{1, 2\}$$

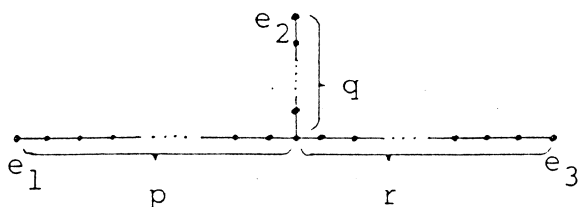
$$b^\#(5e_1^\#, 5e_2^\#) \equiv -10 - \frac{25}{4}j \equiv \frac{2-(10+j)}{4} \pmod{\mathbb{Z}} \quad \square$$

Für die Milnorgitter der unimodularen Serie T_{pqr} und der vierzehn exceptionellen unimodularen Klassen S_{pqr} (zu dieser Bezeichnung vergleiche I.4.1.11) gilt:

$$L(T_{pqr}) = Q_{pqr} \perp (0)$$

$$L(S_{pqr}) = Q_{pqr} \perp U.$$

Dabei ist Q_{pqr} das Gitter, das durch den Graphen



definiert wird. Es gilt: $\text{rg } Q_{pqr} = p+q+r-2$ und $|\text{disk } Q_{pqr}| = pqr - pq - pr - qr$.
Für Tripel (p, q, r) mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

ist Q_{pqr} ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter mit der Signatur $(1, p+q+r-3, 0)$.

Für die Tripel (p, q, r) mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

also für $(p, q, r) = (2, 3, 6), (2, 4, 4)$ oder $(3, 3, 3)$ ist Q_{pqr} ausgeartet und hat die Signatur $(0, p+q+r-3, 1)$.
Teilt man diese Formen durch ihren eindimensionalen Kern, so erhält man nach Gabrielov [Ga 2] negativ definite Formen \bar{Q}_{pqr} mit

$$\bar{Q}_{236} \cong E_8$$

$$\bar{Q}_{244} \cong E_7$$

$$\bar{Q}_{333} \cong E_6$$

Daher gilt für die parabolischen T_{pqr} :

$$q_{T_{236}} \cong 0$$

$$q_{T_{244}} \cong w_{2,1}^1$$

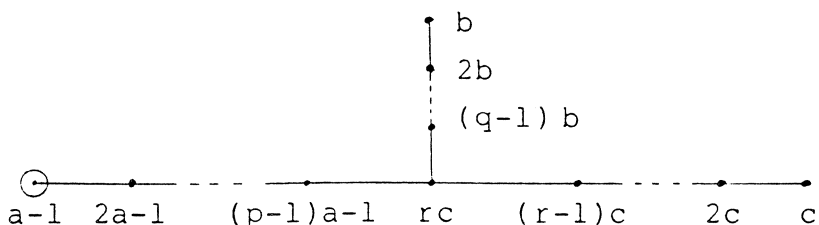
$$q_{T_{333}} \cong w_{3,1}^{-1}$$

Im folgenden sei nun $1/p + 1/q + 1/r < 1$ und $S := Q_{pqr}$.

Zur Berechnung der Diskriminantenform dieser Q_{pqr} orientieren wir uns an der Arbeit [Br 3] von Brieskorn.

Zur Bestimmung eines Erzeugendensystems von G_S :

Für $e_1^\#$ hat der Graph die folgende Bewertung:



wobei $a := \frac{rq-r-q}{d}$, $b := \frac{r}{d}$, $c := \frac{q}{d}$ und $d := |\text{disk } Q_{pqr}|$.

Durch zyklische Vertauschung erhält man die Bewertungen für $e_2^\#$ und $e_3^\#$.

Die Schnittmatrix von $e_1^\#, e_2^\#$ und $e_3^\#$ ist also

$$D := \frac{1}{d} \begin{bmatrix} qr-r-q-d & r & q \\ r & pr-p-r-d & p \\ q & p & pq-p-q-d \end{bmatrix} = [b^\#(e_i^\#, e_j^\#)]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Behauptung: Die Nebenklassen von $e_1^\#, e_2^\#$ und $e_3^\#$ in G_S erzeugen G_S .

Beweis: Sei C die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{bmatrix}$$

mit $\det(C) = d$. Es gilt: $D \equiv C^{-1} \pmod{\mathbb{Z}}$.

Nach dem Elementarteilersatz gibt es $C_1, C_2 \in GL_3(\mathbb{Z})$ mit

$$C_1 \circ C \circ C_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix},$$

wobei $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \mid a_2$ und $a_2 \mid a_3$. Ferner werden die Ideale

$$\left(\prod_{i=1}^s a_i \right)_{\mathbb{Z}}, \quad (1 \leq s \leq 3),$$

durch die $s \times s$ -Unterdeterminanten von C erzeugt.

Da a_1, a_2, a_3 modulo \mathbb{Z}^* eindeutig bestimmt sind, folgt:

$$(a_1)_{\mathbb{Z}} = (1)_{\mathbb{Z}} \implies a_1 \equiv 1 \pmod{\mathbb{Z}^*}$$

$$(a_1, a_2)_{\mathbb{Z}} = (p, q, r)_{\mathbb{Z}} = ((p, q, r))_{\mathbb{Z}} \quad \text{wobei } (p, q, r) := \text{ggT}(p, q, r) \implies a_2 \equiv (p, q, r) \pmod{\mathbb{Z}^*}$$

$$(a_1, a_2, a_3)_{\mathbb{Z}} = (d)_{\mathbb{Z}} \implies a_3 \equiv \frac{d}{(p, q, r)} \pmod{\mathbb{Z}^*}$$

Da $D \equiv C^{-1} \pmod{\mathbb{Z}}$ und $d = |\text{disk } Q_{pqr}|$ erhalten wir:

$$G_S \cong C_{(p,q,r)} \oplus C_{d/(p,q,r)}$$

Insbesondere erzeugen die Nebenklassen von $e_1^\#, e_2^\#$ und $e_3^\#$ die Gruppe G_S . □

Aus dem Beweis folgt, daß G_S bereits von zwei Elementen f_1, f_2 erzeugt wird.

Brieskorn hat ein auf dem Euklidischen Algorithmus beruhendes Verfahren entwickelt, mit dem sich die Werte $q_S(f_1), q_S(f_2)$ und $b_S(f_1, f_2)$ und damit die Diskriminantenform von $S = Q_{pqr}$ berechnen lassen. Dieses Verfahren wird von Sauter in [Sa] dargestellt. Er gibt explizite Formeln für die Zerlegung der Diskriminantenformen dieser Gitter in irreduzible Komponenten an.

Einige T_{pqr} -Singularitäten sind in der Tabelle 3 in [Eb 2] unter anderen Bezeichnungen aufgeführt:

Die T_{23r}, T_{24r} bzw. T_{33r} -Singularitäten werden auch als $J_{2,i}^-, X_{1,i}^-$ bzw. $Q_{1,i}$ -Singularitäten bezeichnet (vgl. [Ar 3], pp 30).

Die Diskriminantenformen lassen sich in diesen Fällen aus den in der Tabelle genannten orthogonalen Zerlegungen der Milnorgitter bestimmen.

Die Diskriminantenformen der Milnorgitter der bimodularen Klassen:

Außer für die bereits oben behandelten Serien $W_{1,i}$ und $S_{1,i}$ können die Diskriminantenformen der bimodularen Serien ebenfalls aus Tabelle 3 in [Eb 2] ermittelt werden. Ebeling ([Eb 2], Th.2.2 ff) hat bemerkt, daß die Milnorgitter aller exzeptioneller bimodularen Klassen außer S_{17} bereits durch ihre Signatur und Diskriminante eindeutig bestimmt sind.

Dies folgt hier aus 1.4.3 und Satz 5 aus 1.1.3.

Insbesondere gilt:

$$q_{W_{17}} \cong w_{2,1}^{-1} \perp w_{5,1}^1$$

$$q_{W_{18}} \cong w_{7,1}^1$$

$$q_{S_{16}} \cong w_{17,1}^{-1}$$

$$q_{U_{16}} \cong w_{5,1}^1 \perp w_{5,1}^{-1}$$

Wir erhalten die folgenden orthogonalen Zerlegungen der Milnorgitter:

$$L(W_{17}) \cong A_1 \perp A_4 \perp E_8 \perp U \perp U$$

$$L(W_{18}) \cong A_6 \perp E_8 \perp U \perp U.$$

Für S_{17} lassen Diskriminante und Signatur nur

$$w_{3,1}^1 \perp w_{2,2}^5 \quad \text{oder} \quad w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^1$$

als Diskriminantenformen zu. In Abschnitt 1.7 zeigen wir:

$$q_{S_{17}} \cong w_{3,1}^1 \perp w_{2,2}^5.$$

Also gilt: $L(S_{17}) \cong A_2 \perp D_{11} \perp U \perp U.$

Im Anhang geben wir die folgenden Ergebnisse an:

Tabelle 1 aus Anhang A.6 enthält die Invarianten (s_+, s_-, s_0, q_X) aller Singularitätenklassen der Modularität höchstens zwei mit Ausnahme der T_{pqr} mit $p \leq q \leq r$, $(p,q) \neq (2,3), (2,4), (3,3)$. Die Klassen sind nach den in II.2.1 genannten Gruppierungen geordnet.

In Tabelle 2 aus Anhang A.6 findet man für $k \leq 16$ die Diskriminantenformen der A_k in irreduzible Komponenten zerlegt. Für die nicht in Tabelle 1 aufgeführten Klassen T_{pqr} enthält Tabelle 3 im Anhang A.6 für niedrige Milnorzahlen Zerlegungen der Diskriminantenformen in irreduzible Komponenten.

IV.1.3 Existenz und Eindeutigkeit gerader, nicht ausgearteter Gitter mit Invarianten (s_+, s_-, q)

1.3.1 p-adische Gitter

Für die irreduziblen endlichen Formen $u_k, v_k, w_{p,k}^\epsilon$ lassen sich nicht ausgeartete, gerade p-adische Gitter, die diese als Diskriminantenformen besitzen, wie folgt angeben ($\epsilon = \pm 1$):

$$K(w_{p,k}^\epsilon) := (\mathbb{Z}_p, \left(\frac{p^k}{\theta}\right)) \quad \text{falls } w_{p,k}^\epsilon \cong (C_{p^k}, \left(\frac{\theta}{p^k}\right)), \quad p \nmid \theta$$

($p > 2$ für $k = 1$)

$$K(w_{2,1}^\epsilon) := K_1(w_{2,1}^\epsilon) := (\mathbb{Z}_2, (2\epsilon))$$

$$K_2(w_{2,1}^\epsilon) := (\mathbb{Z}_2, (10\epsilon))$$

$$K(u_k) := (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \begin{bmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 0 \end{bmatrix})$$

$$K(v_k) := (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 2^k \\ 2^k & 2^{k+1} \end{bmatrix}).$$

Sei (G_p, q_p) eine nicht ausgeartete Form auf einer endlichen abelschen p-Gruppe und

$$q_p = \prod_i q_p^{(i)}$$

eine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist

$$K := \prod_i K(q_p^{(i)})$$

ein gerades, nicht ausgeartetes p-adisches Gitter vom Rang $\lambda(G_p)$ mit Diskriminantenform q_p .

Wann hängt nun die Wahl dieses Gitters nicht von der vorgegebenen Zerlegung ab?

Theorem 1 ([Ni], Th. 1.9.1 & Cor. 1.9.2):

- (i) Sei $p \neq 2$ oder $p = 2$, dann aber $w_{2,1}^{\pm 1}$ kein orthogonaler Summand von q_2 , d.h. keine Zerlegung von q_2 in irreduzible Komponenten enthält $w_{2,1}^{\pm 1}$.

Dann gibt es bis auf Isomorphie genau ein gerades, nicht ausgeartetes p -adisches Gitter vom Rang $\ell(G_p)$ mit der Diskriminantenform q_p .

- (ii) $w_{2,1}^{\pm 1}$ ist genau dann orthogonaler Summand von q_2 , wenn es irreduzible Komponente jeder Zerlegung von q_2 ist.
- (iii) Falls $w_{2,1}^{\pm 1}$ ein orthogonaler Summand von q_2 ist, so gibt es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene nicht ausgeartete 2-adische Gitter vom Rang $\ell(G_2)$ mit der Diskriminantenform q_2 .

Definition:

Das in Theorem 1, (i) genannte, eindeutig bestimmte p -adische Gitter bezeichnen wir mit $K(q_p)$.

1.3.2 Zur Existenz von \mathbb{Z} -Gittern

Seien $s_+, s_- \in \mathbb{N}_0$, $q: G \longrightarrow \mathbb{Q} / 2\mathbb{Z}$ eine nicht ausgeartete endliche Form, $q = \frac{1}{p} q_p$, $q_p: G_p \longrightarrow \mathbb{Q} / 2\mathbb{Z}$ ihre Zerlegung in Primärkomponenten.

Als unmittelbare Konsequenz der Hasse - Minkowski Klassifikation nicht ausgearteter quadratischer Räume über \mathbb{Q} erhält Nikulin das

Theorem 2 ([Ni], Th. 1.10.1):

Ein gerades, nicht ausgeartetes \mathbb{Z} -Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, q) existiert genau dann, wenn die folgenden Bedingungen alle erfüllt sind:

- (i) $s_+ - s_- \equiv \text{sign}(q) \pmod{8}$
- (ii) $s_+ + s_- \geq \ell(G)$
- (iii) Ist $p \neq 2$ und $s_+ + s_- = \ell(G_p)$, so gilt:
 $(-1)^{s_-} |G| \equiv \text{disk } K(q_p) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$
- (iv) Ist $s_+ + s_- = \ell(G_2)$ und $w_{2,1}^{\pm 1}$ kein orthogonaler Summand von q_2 , so gilt: $\pm |G| \equiv \text{disk } K(q_2) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$

Bemerkung:

Zum Nachweis der Eigenschaft (iii) des Theorems 2 ist es für große Primzahlen günstig, mit den Legendre - Symbolen (vgl. [Se], § 3) zu rechnen. Ist eine endliche quadratische Form q in irreduzible Komponenten zerlegt, so reduziert Theorem 2 die Entscheidung, ob ein Gitter mit Invarianten (s_+, s_-, q) existiert, auf die Durchführung Euklidischer Algorithmen.

1.3.3 Eindeutigkeit von \mathbb{Z} - Gittern

Definition:

Zwei \mathbb{Z} -Gitter S und S' liegen in demselben Geschlecht, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $S \otimes \mathbb{Z}_p$ und $S' \otimes \mathbb{Z}_p$ sind als p -adische Gitter für alle Primzahlen p isomorph
- (ii) $S \otimes \mathbb{R}$ und $S' \otimes \mathbb{R}$ sind als Gitter über \mathbb{R} isomorph.

Bemerkungen:

- (i) S und S' liegen insbesondere dann im selben Geschlecht, wenn sie in derselben Klasse liegen, d.h. über \mathbb{Z} isomorph sind. Mittels Reduktionstheorie kann man beweisen, daß ein Geschlecht nur endlich viele Klassen enthält.
- (ii) Ist S ein gerades, nicht ausgeartetes \mathbb{Z} -Gitter, so ist die Diskriminantenform des p -adischen Gitters $S \otimes \mathbb{Z}_p$ gerade die p -te Primärkomponente der zu S gehörigen Diskriminantenform q .
 q ist also ebenso wie die Signatur (s_+, s_-) eine Invariante des Geschlechtes von S .

Der folgende Satz besagt, daß (s_+, s_-, q) sogar ein vollständiges System von Invarianten für das Geschlecht von S ist:

Satz ([Ni]):

Zwei gerade, nicht ausgeartete Gitter S und S' liegen genau dann in demselben Geschlecht, wenn sie dieselbe Signatur und Diskriminantenform besitzen.

Wann gibt es in einem Geschlecht nur eine Klasse von Gittern? Wann ist also ein Gitter durch seine Invarianten (s_+, s_-, q) eindeutig bestimmt? Ein hinreichendes Kriterium von Kneser (vgl. [Ni]) zeigt, daß dies für indefinite Gitter (im Gegensatz zu definiten Gittern) "häufig" der Fall ist. Dieses Kriterium benutzt Nikulin, um die Eindeutigkeit eines Milnorgitters zu beweisen. Wir werden dieses Kriterium nur in der folgenden abgeschwächten Form benötigen:

Theorem 3 ([Ni], Cor. 1.13.3):

Ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, q) existiert und ist bis auf Isomorphie durch diese Invarianten eindeutig bestimmt, wenn gilt:

- (i) $s_+ - s_- \equiv \text{sign } q \pmod{8}$,
- (ii) $s_+ + s_- \geq 2 + \ell(G)$,
- (iii) $s_+ \geq 1, s_- \geq 1$.

IV.1.4 Obergitter und primitive Einbettungen nicht ausgearteter gerader Gitter

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Technik für die Untersuchung primitiver Einbettungen nicht ausgearteter gerader Gitter. Hierzu wird eine Bijektion zwischen den geraden Obergittern eines Gitters S und den isotropen Untergruppen von (G_S, q_S) benutzt.

1.4.1 Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Wir setzen

$$G^\# := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Lemma:

Es existiert ein Isomorphismus $G \longrightarrow G^\#$.

Beweis:

Wir können o.B.d.A. $G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim und $r \in \mathbb{N}$ annehmen.

Mit $\pi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die kanonische Projektion.

$$G^\# \longrightarrow \{ x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid p^r x = 0 \} = \left\{ \pi\left(\frac{k}{p^r}\right) \mid 0 \leq k < p^r \right\} = G$$

$$\lambda \longmapsto \lambda(1)$$

ist ein Isomorphismus. □

Lemma:

Es sei (G, b) eine endliche symmetrische Bilinearform.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow G^\# \\ x &\longmapsto (y \longmapsto b(x, y)) \end{aligned}$$

ist genau dann ein Isomorphismus, wenn (G, b) nicht ausgeartet ist. □

Das folgende Resultat wird häufig benutzt werden.

Satz:

Es sei (G, b) eine nicht ausgeartete endliche Form, $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann gilt

- (i) $|H| |H^\perp| = |G|$
 (ii) Ist $(H, b|)$ nicht ausgeartet, so ist
 $(G, b) \simeq (H, b|) \perp (H^\perp, b|)$.

Beweis:

- (i) - $\rho(H^\perp) = \{ \lambda \in G^\# \mid \lambda(y) = 0 \text{ für alle } y \in H \}$
 - Man hat einen kanonischen Isomorphismus
 $(G/H)^\# \simeq \{ \lambda \in G^\# \mid \lambda(x) = 0 \text{ für alle } x \in H \}$
 - $|G| |H|^{-1} = |G/H| = |(G/H)^\#| = |H^\perp|$.
- (ii) Es sei $y \in G$. Dann definiert y ein Element $\lambda \in H^\#$ durch
 $\lambda(x) = b(x, y)$ für $x \in H$. Es ist $(H, b|)$ nicht ausgeartet.
 Deshalb existiert ein $z \in H$ mit $b(z, x) = b(y, x)$ für alle
 $x \in H$. Es ist

$$y = z + (y-z) \quad \text{mit } y-z \in H^\perp.$$

Da $(H, b|)$ nicht ausgeartet ist, gilt $H \cap H^\perp = \{0\}$. □

1.4.2 Definition:

- (i) Es sei (G, q) eine endliche quadratische Form. Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt isotrop, wenn $q|_H \equiv 0$.
- (ii) Es seien S, \hat{S} gerade Gitter gleichen Ranges mit $S \subset \hat{S}$. \hat{S} heißt gerades Obergitter von S , falls die Inklusion eine Gittereinbettung ist.

Bemerkung:

- (i) Nach dem Elementarteilersatz ist \hat{S}/S eine endliche Gruppe.
- (ii) Wir werden im folgenden stets o.B.d.A. $\hat{S} \subset S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ annehmen.

Es sei (S, b) ein nicht ausgeartet es gerades Gitter.

Mit

$$\phi : S \longrightarrow S^\#$$

bezeichnen wir die assoziierte Abbildung. Dann ist

$$\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id} : (S \otimes \mathbb{Q}, b) \longrightarrow (S^\# \otimes \mathbb{Q}, b^\#)$$

eine Isometrie.

Deshalb definiert diese Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der geraden Obergitter von S in $S \otimes \mathbb{Q}$ und der Menge der geraden Obergitter von $\phi(S)$ in $S^\# \otimes \mathbb{Q}$.

Es sei nun $S \subset \hat{S} \subset S \otimes \mathbb{Q}$ ein gerades Obergitter. Die Sequenz

$$S \longrightarrow \hat{S} \longrightarrow \hat{S}^\# \longrightarrow S^\#$$

von Einbettungen zeigt, daß wir

$$H_{\hat{S}} := \hat{S} / S$$

als Untergruppe von

$$G_S := S^\# / S$$

auffassen können.

Satz (V.V. Nikulin [Ni], prop. 1.4.1):

Es sei S ein gerades nicht ausgeartetes Gitter. Dann gilt

(i) Die Abbildung

$$\hat{S} \longrightarrow H_{\hat{S}} := \hat{S} / S$$

definiert eine Bijektion zwischen der Menge der geraden Obergitter $S \subset \hat{S} \subset S \otimes \mathbb{Q}$ von S und der Menge der isotropen Untergruppen in (G_S, q_S) .

(ii) Es ist

$$H_{\hat{S}}^\perp = \hat{S}^\# / S, \quad q_{\hat{S}} = (q_S | H_{\hat{S}}^\perp) / H_{\hat{S}}.$$

Beachtet man die Resultate aus 1.4.1, so erhält man

Korollar:

Ist $S \subset \hat{S}$ ein gerades Obergitter, so gilt

$$\text{disk } S = |\hat{S}/S|^2 \text{ disk } \hat{S}.$$

Beweis des Satzes:

Wir bezeichnen mit

$$\pi_S: S^\# \longrightarrow S^\# / S \quad \pi_{\hat{S}}: \hat{S}^\# \longrightarrow \hat{S}^\# / \hat{S}$$

$$\pi_1: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z} \qquad \pi_2: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} / 2\mathbb{Z}$$

die kanonischen Projektionen, mit b bzw. $b^\#$ die Bilinearform auf S bzw. $S^\#$.

- (i) Es sei $S \subset \hat{S} \subset S \otimes \mathbb{Q}$ ein gerades Obergitter. Für $x \in \hat{S}$ ist $b^\#(x, x) \in 2\mathbb{Z}$, also $q_S(\pi_S(x)) = 0$. Also ist H_S^\perp isotrope Untergruppe in G .

Ist umgekehrt H eine isotrope Untergruppe in G , so setze $\hat{S} := \pi_S^{-1}(H)$. \hat{S} ist dann ein freier Modul, und $b^\#|_{\hat{S} \times \hat{S}}$ definiert ein gerades Gitter, denn für $x, y \in \hat{S}$ gilt

$$\pi_1 b^\#(x, y) = b_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) = 0$$

$$\pi_2 b^\#(x, x) = q_S(\pi_S(x)) = 0$$

- (ii) Es ist $H_S^\perp \supset \hat{S}^\# / S$, denn für $x \in \hat{S}^\#, y \in \hat{S}$ ist

$$b_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) = \pi_1 b^\#(x, y) = b_{\hat{S}}(\pi_{\hat{S}}(x), \pi_{\hat{S}}(y)) = 0$$

Mit dem Satz aus 1.4.1 zeigt man, daß beide Gruppen dieselbe Ordnung haben. Es ist

$$\frac{H_S^\perp}{H_S} = \frac{(\hat{S}^\# / S)}{(\hat{S} / S)} = \frac{\hat{S}^\#}{\hat{S}} \quad \square$$

Beispiel:

Das Gitter $L(U_{16})$ ist nicht ausgeartet und hat die Diskriminantenform $q = w_{5,1}^1 \perp w_{5,1}^{-1}$. Weil $\{0\}$ die einzige isotrope Untergruppe in $G_{U_{16}}$ ist, besitzt $L(U_{16})$ kein echtes gerades Obergitter.

1.4.3 Definition:

Ein Untergitter $S \subset M$ eines Gitters M heißt primitiv, wenn M/S ein freier \mathbb{Z} -Modul ist. Eine Gittereinbettung heißt $i: S \longrightarrow M$ heißt primitiv, wenn $i(S) \subset M$ ein primitives Untergitter ist.

Aus der Algebra (siehe z.B. [Lan], I §9 und I §10)

kennt man folgendes Lemma:

Lemma

Für endlich erzeugte freie \mathbb{Z} -Moduln $S \subset M$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) M/S ist torsionsfrei
- (ii) M/S ist frei
- (iii) Es existiert ein freier Modul $S' \subset M$ mit $M = S \oplus S'$. □

Wir interessieren uns für die folgende Situation:
Es seien M, S, K nicht ausgeartete gerade Gitter und $S \perp K \subset M$ sei ein Obergitter. Wir betrachten die Inklusionen

$$S \perp K \subset M \subset M^\# \subset S^\# \perp K^\#.$$

Gemäß 1.4.2 definieren wir die isotrope Untergruppe

$$\Gamma := M / (S \perp K) \subset S^\# / S \oplus K^\# / K = G_S \oplus G_K$$

Es gilt

$$q_M = (q_S \perp q_K | \Gamma^\perp) / \Gamma$$

Unser Ziel ist es, für primitive Untergitter $S, K \subset M$ Γ genauer zu beschreiben. Dazu betrachten wir die Projektionen

$$\begin{aligned} p_S: \Gamma &\longrightarrow G_S \\ p_K: \Gamma &\longrightarrow G_K \end{aligned} .$$

Behauptung:

$$p_S \text{ injektiv} \iff K \subset M \text{ primitives Untergitter}$$

Beweis:

Es existiert eine isotrope Untergruppe $H \subset G_K$, so daß

$$\text{Kern } p_S = 0 \oplus H$$

$$H \neq 0 \iff \text{es ex. ein gerades Obergitter } K \subset \hat{K}, K \neq \hat{K} \text{ mit } S \perp K \subset S \perp \hat{K} \subset M.$$

$$\iff K \text{ kein primitives Untergitter von } M. \quad \square$$

Sind also $S, K \subset M$ primitive Untergitter, so sind die Abbildungen

$$p_S: \Gamma \longrightarrow p_S(\Gamma) =: H_S$$

$$p_K: \Gamma \longrightarrow p_K(\Gamma) =: H_K$$

Isomorphismen. Wir setzen

$$\gamma := p_K \circ p_S^{-1} : H_S \longrightarrow H_K.$$

Dann ist

$$\Gamma = \{ (x, \gamma(x)) \mid x \in H_S \}$$

Graph des Isomorphismus γ in $G_S \oplus G_K$. Außerdem gilt

$$q_K \circ \gamma = -q_S|_{H_S}$$

auf H_S , da Γ isotrope Untergruppe ist. Berücksichtigt man noch die Bijektivität aus 1.4.2, so folgt

Satz (V.V. Nikulin [Ni], prop. 1.5.1):

Es seien S, K nicht ausgeartete gerade Gitter. Wir haben eine kanonische Bijektion von der Menge

$$\{ M \mid M \text{ gerades Gitter, } S \perp K \subset M \subset (S \perp K) \otimes \mathbb{Q}, S, K \subset M \text{ primitiv} \}$$

auf die Menge

$$\{ (H, \gamma) \mid H \subset G_S \text{ Untergruppe, } \gamma: H \longrightarrow G_K \text{ Gruppenmonomorphismus mit } q_K \circ \gamma = -q_S|_H \}$$

Für das zum Paar (H, γ) gehörende Obergitter M gilt

$$q_M = (q_S \perp q_K|_{\Gamma^\perp}) / \Gamma,$$

wobei Γ den Graph des Morphismus $\gamma: H \longrightarrow G_K$ in $G_S \oplus G_K$ bezeichnet. □

Korollar:

Es seien S, K nicht ausgeartete gerade Gitter. Genau dann existiert ein gerades unimodulares Obergitter $S \perp K \subset L$ mit $K, S \subset L$ primitive Untergitter, wenn $q_K = -q_S$.

Folgerung:

Sind q_1, q_2 nicht ausgeartete endliche quadratische Formen mit $q_1 \approx -q_2$, so gilt $\text{sign } q_1 \equiv -\text{sign } q_2 \pmod{8}$.

Beweis für Korollar und Folgerung:

(i) Mit den bisher verwandten Bezeichnungen gilt:

$$|G_S| |G_K| = |\Gamma| |\Gamma^\perp|$$

$|\Gamma|$ ist Teiler von $|G_S|, |G_K|$.

Hieraus folgt das Korollar.

(ii) Sind q_1, q_2 Formen mit $q_1 \approx -q_2$, so existieren nicht ausgeartete Gitter S, K mit $q_S \approx q_1$ und $q_K \approx q_2$ (siehe 1.3). Nach Korollar existiert ein unimodulares gerades Obergitter $S \perp K \subset L$, wobei $S, K \subset L$ primitiv.

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{sign } q_1 + \text{sign } q_2 &\equiv \text{sign } S + \text{sign } K \equiv \text{sign } S \perp K \\ &\equiv \text{sign } L \equiv 0 \pmod{8}, \end{aligned}$$

weil L unimodular und gerade ist. □

Bemerkung:

Ist q eine der irreduziblen Formen $u_k, v_k, w_{p,k}^\epsilon$, so gilt $q \approx -q$ genau dann, wenn q einer der folgenden Formen ist:

$$u_k, v_k, w_{p,k}^\epsilon \quad \text{mit } p \equiv 1 \pmod{4}$$

Für eine Primzahl $p \neq 2$ ist $-1 \in C_p^{*2}$ genau dann, wenn für das Legendre - Symbol

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$$

gilt. Dies ist gerade für $p \equiv 1 \pmod{4}$ der Fall.

1.4.4 Unser Ziel ist es, für nicht ausgeartete gerade Gitter S und M zu entscheiden, ob man S primitiv in M einbetten kann. Für die Entscheidung derartiger Probleme werden wir auf den folgenden Satz von Nikulin zurückgreifen.

Theorem (V.V. Nikulin [Ni], prop. 1.15.1):

Es seien S, M gerade, nicht ausgeartete Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, q_S) bzw. (m_+, m_-, q_M) . Genau dann läßt sich S primitiv in ein gerades Gitter M' aus dem Geschlecht von M einbetten, wenn ein Tripel (H, γ, K) mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) K ist ein gerades Gitter mit den Invarianten $(m_+ - s_+, m_- - s_-, q_K)$.
- (ii) $H \subset G_S$ ist eine Untergruppe und $\gamma: H \longrightarrow G_M$ ein Gruppenmonomorphismus mit $q_M \circ \gamma = q_S|_H$.
- (iii) $q_K = (-q_S \perp q_M|_{\Gamma^\perp}) / \Gamma$, wobei Γ der Graph von $\gamma: H \longrightarrow G_M$ in $G_S \oplus G_M$ ist.

Es gilt dann $K \approx S_M^\perp$.

Bemerkung:

- (i) Zwei gerade nicht ausgeartete Gitter M, M' liegen genau dann im gleichen Geschlecht, wenn für ihre Invarianten

$$(m_+, m_-, q_M) = (m'_+, m'_-, q_{M'})$$

gilt.

- (ii) Sind (m_+, m_-, q_M) die Invarianten eines nicht ausgearteten geraden Gitters, dessen Geschlecht nur eine Klasse enthält, so wird das Problem der primitiven Einbettbarkeit eines nicht ausgearteten geraden Gitters S auf die Entscheidung reduziert, ob zu vorgegebenen Invarianten ein gerades Gitter K existiert.

Beweis des Theorems:

- (i) Es sei $S \subset M$ ein primitives Untergitter. Nach dem Korollar aus 1.4.3 existiert ein unimodulares gerades Obergitter L mit

$$M \perp (-M) \subset L, \quad \text{wobei } M, -M \subset L \text{ primitiv.}$$

L hat die Signatur $(m_+ + m_-, m_+ + m_-)$.

Es ist

$$R := L \cap (S \perp (-M)) \otimes \mathbb{Q} \subset L$$

ein primitives Untergitter und

$$S \perp (-M) \subset R$$

ein gerades Obergitter. Wir setzen $K := R \perp_L$. Wende nun den Satz aus 1.4.3 auf

$$S \perp (-M) \subset R$$

und das Korollar aus 1.4.3 auf

$$R \perp K \subset L$$

an.

- (ii) Es sei (H, γ, K) ein Tripel mit den geforderten Eigenschaften. Nach 1.4.3 bestimmt das Paar (H, γ) ein gerades Obergitter

$$(*) \quad S \perp (-M) \subset R,$$

wobei $S, -M \subset R$ primitive Untergitter sind und R die Invarianten $(s_+ + m_-, s_- + m_+, -q_K)$ besitzt. Nach dem Korollar aus 1.4.3 existiert ein unimodulares gerades Obergitter L mit

$$R \perp K \subset L,$$

wobei $R, K \subset L$ primitive Untergitter sind. L hat die Signatur $(m_+ + m_-, m_+ + m_-)$.

Wendet man nun das Korollar auf

$$(-M) \perp (-M) \perp_L \subset L$$

an, so sieht man, daß $M' := (-M) \perp_L$ die Invarianten (m_+, m_-, q_M) besitzt.

Wegen (*) ist

$$S \subset M'$$

ein primitives Untergitter. □

IV.1.5 Primitive Einbettungen ausgearteter gerader Gitter

1.5.1 Bei unseren Untersuchungen taucht folgendes Problem auf:

Es sei (p, q, r) ein Tripel natürlicher Zahlen mit $p \leq q \leq r$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Wann läßt sich das Milnorgitter

$$L(T_{pqr}) = Q_{pqr} \perp (0)$$

in ein vorgegebenes gerades, nicht ausgeartetes Gitter M primitiv einbetten? Dabei ist für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ das Gitter Q_{pqr} nicht ausgeartet.

In den von uns untersuchten Fällen ist dieses Problem mit Hilfe der folgenden Sätze stets entscheidbar. Zunächst bemerken wir

Lemma:

Es sei K ein gerades Gitter mit Signatur $(1,1)$ und disk $K \cong -1(\mathbb{Q}^{*2})$. Ist $S \perp K$ primitiv in ein Gitter M einbettbar, so auch $S \perp (0)$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß es in $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ einen von Null verschiedenen isotropen Vektor gibt.

Bezüglich geeigneter Basen läßt sich die Bilinearform auf $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ durch eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$$

beschreiben. Da $a_1 a_2 \equiv -1(\mathbb{Q}^{*2})$, besitzt die Gleichung

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 = 0$$

eine Lösung $0 \neq (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

□

Den folgenden Satz verdanken wir einen Hinweis von W. Ebeling. Wir bezeichnen mit (0) wieder das eindimensionale Nullgitter.

Satz 1

Es seien S, M nicht ausgeartete gerade Gitter; ferner gelte

$$p^r \mid \text{disk } M \implies r \leq 2$$

für alle Primzahlen p . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $S \perp (0)$ läßt sich primitiv in M einbetten.
- (ii) Es existiert ein gerades Gitter K mit Signatur $(1,1)$ und $\text{disk } K \equiv -1 \pmod{2}$, und es existiert ein gerades Gitter N mit

$$M \cong N \perp K$$

$$S \hookrightarrow N \text{ primitiv.}$$

Nicht jedes Milnorgitter einer bimodularen Singularität erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Man kann aber stets eine notwendige Bedingung für die primitive Einbettbarkeit von $S \perp (0)$ in M angeben.

Im folgenden bezeichne U die hyperbolische Ebene.

Satz 2

Es seien S, M nicht ausgeartete gerade Gitter, $\rho: S \perp (0) \longrightarrow M$ sei eine primitive Einbettung.

Dann existiert ein primitives Untergitter $N \subset M$ und ein gerades Obergitter $M \subset \hat{M}$ mit

$$\hat{M} \cong N \perp U$$

$$S \hookrightarrow N \text{ primitiv.}$$

Korollar 3

Es seien S, M nicht ausgeartete gerade Gitter, und M besitze kein echtes gerades Obergitter.

Genau dann läßt sich $S \perp (0)$ primitiv in M einbetten, wenn sich $S \perp U$ primitiv in M einbetten läßt.

□

Korollar 4

Es seien S, M gerade nicht ausgeartete Gitter, und es gelte $\text{Rang } M = 2 + \text{Rang } S$. Läßt sich $S \perp (0)$ primitiv in M einbetten, so existiert eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$\text{disk } M = -a^2 \text{disk } S.$$

□

Die beiden Korollare folgen unmittelbar aus Satz 2. Wir fassen den Beweis von Satz 1 und Satz 2 zusammen.

Beweis:

Es sei $\rho: S \perp (0) \longrightarrow M$ eine primitive Einbettung, $s = \text{Rang } S$, $m = \text{Rang } M$, $\{f_1, \dots, f_s\}$ eine Basis von S und $\{f\}$ eine Basis von (0) .

(i) Man kann eine Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$ von M so wählen, daß

$$\begin{aligned} e_{m-1} &= \rho(f) \\ \langle e_{m-1} \rangle^\perp &= \langle e_1, \dots, e_{m-1} \rangle. \end{aligned}$$

Bezüglich dieser Basis wird das Gitter M durch die $m \times m$ - Matrix

$$(a_{ij}) = \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ * & & a & b \end{matrix} \end{bmatrix}$$

beschrieben, wobei $a \neq 0$, $b \in 2\mathbb{Z}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ eine symmetrische $(m-2) \times (m-2)$ - Matrix ist.

(ii) Wir setzen

$$N := \langle e_1, \dots, e_{m-2} \rangle$$

und definieren

$$\pi_N: M \longrightarrow N \quad \text{kanonische Projektion bzgl. der Basis } \{e_1, \dots, e_m\}$$

$$\tilde{\rho} := \pi_N \circ \rho.$$

Die Bilinearform auf M bezeichnen wir mit b , die auf $S \perp (0)$ mit b' .

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{\rho} | S \longrightarrow N$ eine primitive Einbettung ist.

Es gilt

$$\rho(f_i) = \tilde{\rho}(f_i) + \alpha_i e_{m-1} + \beta_i e_m, \quad 1 \leq i \leq s$$

Weil $b(\rho(f_i), \rho(f)) = 0$, folgt $\beta_i = 0$ für $1 \leq i \leq s$.

Es gilt

$$\begin{aligned} b(\tilde{\rho}(f_i), \tilde{\rho}(f_j)) &= b(\rho(f_i - \alpha_i f), \rho(f_j - \alpha_j f)) \\ &= b'(f_i - \alpha_i f, f_j - \alpha_j f) \\ &= b'(f_i, f_j) \end{aligned}$$

Da S nicht ausgeartet ist, ist $\tilde{\rho} | S \longrightarrow N$ eine Einbettung. Ferner gilt

$$\langle \tilde{\rho}(f_1), \dots, \tilde{\rho}(f_s), e_{m-1} \rangle = \rho(S \perp (0)).$$

Also ist die Einbettung auch primitiv.

(iii) M erfülle jetzt die Voraussetzung von Satz 1:

$$p^r | \text{disk } M \quad \Rightarrow \quad r \leq 2.$$

Es gilt

$$\det \mathcal{O} = -a^2 \det \tilde{\mathcal{O}}$$

und deshalb

$$\tilde{\mathcal{O}} \in GL(m-2, \mathbb{Q})$$

a und $\det \tilde{\mathcal{O}}$ sind teilerfremd, das heißt $(a, \det \tilde{\mathcal{O}}) = (1) = \mathbb{Z}$.

Es ist $(\det \tilde{\mathcal{O}}) \tilde{\mathcal{O}}^{-1}$ eine $(m-2) \times (m-2)$ -Matrix mit Koeffizienten aus \mathbb{Z} ([Lan], chap. XIII).

Es war $\mathcal{O} = (a_{ij})$.

Zu den ganzen Zahlen $a_{m,j}$, $1 \leq j \leq m-2$ existieren $r_j, s_j \in \mathbb{Z}$ mit

$$a_{m,j} = r_j a + s_j \det \tilde{\mathcal{O}}.$$

Es existieren ferner $x_1, \dots, x_{m-2} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\tilde{\mathcal{O}} \circ (x_1, \dots, x_{m-2})^t = (\det \tilde{\mathcal{O}}) (s_1, \dots, s_{m-2})^t$$

kurz $\tilde{\mathcal{O}} \underline{x} = (\det \tilde{\mathcal{O}}) \underline{s}$

Weil $\underline{x} = (\det \tilde{\mathcal{A}}) \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \underline{s}$, folgt $x_1, \dots, x_{m-2} \in \mathbb{Z}$.

Wir betrachten den folgenden Basiswechsel in M :

$$e'_m = e_m - \sum_{i=1}^{m-2} x_i e_i$$

$$e'_j = e_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq m-1$$

Es gilt

$$b(e'_m, e'_{m-1}) = b(e_m, e_{m-1}) = a$$

$$b(e'_m, e'_j) = b(e_m, e_j) - \sum_{i=1}^{m-2} x_i b(e_i, e_j)$$

$$= a_{m,j} - \sum_{i=1}^{m-2} a_{j,i} x_i$$

$$= a_{m,j} - s_j \det \tilde{\mathcal{A}}$$

$$= r_j a \quad \text{für } 1 \leq j \leq m-2$$

nach Konstruktion von \underline{x} .

Bezüglich dieser Basis wird das Gitter M durch die Matrix

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tilde{\mathcal{A}} & 0 & r_1 a \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & r_{m-2} a \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ r_1 a & \dots & r_{m-2} a & a & * \end{array} \right]$$

beschrieben.

Man führt jetzt einen weiteren Basiswechsel durch. Er wird durch

$$\hat{e}_j = e'_j - r_j e'_{m-1} \quad 1 \leq j \leq m-2$$

$$\hat{e}_{m-1} = e'_{m-1}$$

$$\hat{e}_m = e'_m$$

gegeben. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 b(\hat{e}_i, \hat{e}_j) &= b(e'_i, e'_j) && \text{für } 1 \leq i, j \leq m-1 \\
 b(\hat{e}_j, \hat{e}_m) &= b(e'_j, e'_m) - r_j b(e'_{m-1}, e'_m) \\
 &= r_j a - r_j a = 0 && \text{für } 1 \leq j \leq m-2
 \end{aligned}$$

Somit wird das Gitter M bezüglich dieser Basis durch eine Matrix der Gestalt

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{O} & 0 & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 \cdot \cdot \cdot 0 & a & \\ 0 \cdot \cdot \cdot a & & * \end{array} \right]$$

beschrieben. Damit ist die eine Richtung von Satz 1 bewiesen. Die andere folgt aus dem Lemma.

(iv) Beweis von Satz 2:

Wir definieren ein Gitter \hat{M} mit Rang m wie folgt: Es werde bezüglich einer Basis $\{g_1, \dots, g_m\}$ durch die Matrix \mathcal{O}' beschrieben, die aus der in (i) definierten Matrix \mathcal{O} durch Setzen von $a_{m-1,m} = a_{m,m-1} = 1$ entsteht.

Die durch

$$\begin{aligned}
 e_i &\longmapsto g_i && i \neq m-1 \\
 e_{m-1} &\longmapsto a g_{m-1}
 \end{aligned}$$

induzierte Abbildung zeigt, daß \hat{M} ein gerades Obergitter von M ist. Es ist nur noch

$$\hat{M} = N \perp U$$

zu zeigen.

Führt man Basiswechsel wie am Ende von (iii) durch, so wird das Gitter \hat{M} durch die Matrix

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tilde{\mathcal{O}} & 0 & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 \cdot \cdot \cdot 0 & 1 & \\ 0 \cdot \cdot \cdot 1 & & b \end{array} \right]$$

beschrieben. Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

beschreibt die hyperbolische Ebene, da $b \in 2\mathbb{Z}$ und es genau ein unimodulares gerades Gitter mit Signatur $(1,1)$ gibt. □

1.5.2 Bei unseren Untersuchungen, ob eine primitive Einbettung $S \perp (0) \rightarrow M$ existiert, ist M eines der folgenden Gitter

- (i) M ist Milnorgitter einer bimodularen exzeptionellen Singularität
- (ii) M ist Milnorgitter für eine der folgenden μ -Homotopieklassen

$$\begin{array}{ll} J_{3,i} ; Z_{1,i} ; Q_{2,i} & 0 \leq i \leq 4 \\ W_{1,i} ; S_{1,i} & 0 \leq i \leq 3 \\ W_{1,i}^{\#} ; S_{1,i}^{\#} & 1 \leq i \leq 3 \\ U_{1,i} & 0 \leq i \leq 2 \end{array}$$

Besitzt M kein echtes gerades Obergitter, so wird die Untersuchung mit Korollar 3 aus 1.5.1 auf die Frage zurückgeführt, ob sich $S \perp U$ primitiv in M einbetten läßt. Jetzt sind beide Gitter nicht ausgeartet, und wir können deshalb das Theorem aus 1.4.4 anwenden.

Mit dem Satz aus 1.4.2 und den Diskriminantenformen aus Anhang A.6 lassen sich leicht die Milnorgitter aus obiger Liste bestimmen, die echte, gerade Obergitter besitzen. Es sind dies die Gitter

$$L(J_{3,4}) ; L(Z_{1,4}) ; L(Q_{2,4}) ; L(U_{1,0})$$

Es sei M eines dieser vier Milnorgitter. Für jedes M definieren wir gerade Gitter N_j , $j \in \{1,2\}$, mit Invarianten (n_+, n_-, q_{N_j}) , wobei die Invarianten aus unten stehender Tabelle zu entnehmen sind. Die Gitter N_j sind durch die angegebenen Invarianten bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (siehe 1.3).

Tabelle

M	(n_+, n_-, q_M)	(n_+, n_-)	q_{N_1}	q_{N_2}
$L(J_{3,4})$	$(2, 18, u_1)$	$(1, 17)$	u_1	0
$L(Z_{1,4})$	$(2, 17, u_1 \perp w_{2,1}^1)$	$(1, 16)$	$u_1 \perp w_{2,1}^1$	$w_{2,1}^1$
$L(Q_{2,4})$	$(2, 16, u_1 \perp w_{3,1}^{-1})$	$(1, 15)$	$u_1 \perp w_{3,1}^{-1}$	$w_{3,1}^{-1}$
$L(U_{1,0})$	$(2, 12, w_{3,1}^1 \perp w_{3,2}^1)$	$(1, 11)$	$w_{3,1}^1 \perp w_{3,2}^1$	$w_{3,1}^1$

Folgerung 5

Es existiert genau dann eine primitive Einbettung $S \perp (0) \rightarrow M$, wenn eine primitive Einbettung von S in eines der beiden zu M gehörenden Gitter N_j existiert. Dabei sind M und N_j , $j \in \{1, 2\}$, aus oben stehender Tabelle zu entnehmen.

Beweis:

" \Leftarrow " : Es sei K_1 ein gerades Gitter mit Invarianten $(1, 1, u_1)$ und K_2 ein gerades Gitter mit Invarianten $(1, 1, w_{3,2}^1)$. K_1 und K_2 existieren nach 1.3.

Es gilt

$$M \approx N_1 \perp U$$

$$M \approx N_2 \perp K_1 \quad \text{für } M \neq L(U_{1,0})$$

$$M \approx N_2 \perp K_2 \quad \text{für } M = L(U_{1,0})$$

da die Invarianten übereinstimmen und M durch die Invarianten bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Das Lemma aus 1.5.1 liefert die Behauptung.

" \Rightarrow " : M habe die Invarianten (m_+, m_-, q_M) . Gemäß 1.4.2 lassen sich die möglichen geraden Obergitter $M \subset \hat{M}$ berechnen. Die Bedingung

$$\hat{M} \approx N \perp U$$

aus Satz 2 in 1.5.1 liefert dann

$$(n_+, n_-, q_N) = (m_+ - 1, m_- - 1, q_{\hat{M}}).$$

□

IV.1.6 Zur Anwendung

In diesem Abschnitt stellen wir die Standardargumentationen vor, die wir in unseren Rechnungen in V.1 bei der Anwendung des Theorems aus 1.4.4 stillschweigend benutzen werden. Außerdem bestimmen wir die Diskriminantenform von $L(S_{17})$.

1.6.1 Die Diskriminantenform von $L(S_{17})$

Das Milnorgitter $L(S_{17})$ hat die Diskriminante -12 und die Signatur $(2,15)$. Für die zugehörige endliche quadratische Form gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten

$$\begin{aligned} q_1 &= w_{2,2}^5 \perp w_{3,1}^1 \\ q_2 &= w_{2,2}^1 \perp w_{3,1}^{-1} \end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz aus 1.3 existiert zu den Invarianten $(2,15,q_1)$ bzw. $(2,15,q_2)$ bis auf Isomorphie genau ein gerades Gitter. Wir bezeichnen es mit M_1 bzw. M_2 .

Das Milnorgitter $L(S_{16})$ hat die Invarianten $(2,14,w_{17,1}^{-1})$. Wir zeigen mit dem Theorem aus 1.4.4, daß sich $L(S_{16})$ nicht primitiv in M_2 einbetten läßt. Da sich aber S_{17} in die Klasse S_{16} μ -vereinfacht und deshalb $L(S_{16})$ ein primitives Untergeritter von $L(S_{17})$ ist, folgt

$$L(S_{17}) = M_1.$$

Beweis für $L(S_{16}) \not\hookrightarrow M_2$ primitiv:

Wir benutzen das Theorem aus 1.4.4.

$$\delta := -q_{S_{16}} \perp q_2 = w_{17,1}^{-1} \perp w_{2,2}^1 \perp w_{3,1}^{-1}$$

Es ist $\Gamma = \{0\}$ die einzige isotrope Untergruppe für δ .

Wir zeigen mit dem Existenzsatz aus 1.3, daß kein gerades Gitter K mit den Invarianten $(0,1,\delta)$ existiert:

Für $p = 3$ ist die Bedingung
 $(-1) 4 \cdot 3 \cdot 17 \equiv \text{disk } K(w_{3,1}^{-1}) \equiv \frac{3}{2} (\mathbb{Z}_3^{*2})$
 des Existenzsatzes verletzt.

□

1.6.2 Die Berechnung von $(-q_S \perp q_M | \Gamma^\perp) / \Gamma$ aus 1.4.4

Es seien (s_+, s_-, q_S) , (m_+, m_-, q_M) Invarianten gerader Gitter. $\delta := -q_S \perp q_M$ ist eine endliche quadratische Form auf $G_S \oplus G_M$.

Es sei $H \subset G_S$ eine Untergruppe und $\gamma: H \rightarrow G_M$ ein Gruppenmonomorphismus mit $q_M \circ \gamma = q_S | H$.

Mit Γ bezeichnen wir den Graph von γ in $G_S \oplus G_M$. Dann gilt

- (i) $|\Gamma| |\Gamma^\perp| = |G_S| |G_M|$ (1.5.1)
- (ii) $|\Gamma| = |H|$ und
 $|\Gamma|$ ist Teiler von $|\Gamma^\perp|$, $|G_S|$, $|G_M|$
- (iii) $\text{sign}(\delta | \Gamma^\perp) / \Gamma \equiv \text{sign} \delta \equiv$
 $(m_+ - s_+) - (m_- - s_-)$ (8)

Nützlich ist ferner die folgende Beobachtung:

Es sei

$$(G_S, q_S) \approx \prod_{i=1}^r (G_{S,i}, q_{S,i})$$

$$(G_M, q_M) \approx \prod_{i=1}^r (G_{M,i}, q_{M,i})$$

(z.B. Zerlegung in Primärkomponenten). Ferner seien für $1 \leq i \leq r$

$$\begin{array}{ll} H_i \subset G_{S,i} & \text{Untergruppen} \\ \gamma_i: H_i \rightarrow G_{M,i} & \text{Gruppenmonomorphismen mit} \\ & q_{M,i} \circ \gamma_i = q_{S,i} | H_i \end{array}$$

Es bezeichne Γ_i den Graph von γ_i in $G_{S,i} \oplus G_{M,i}$
 Γ_i^\perp die zugehörige Gruppe in $G_{S,i} \oplus G_{M,i}$ bzgl. $\delta |$
 Γ den Graph von $\bigoplus_{i=1}^r \gamma_i$ in $G_S \oplus G_M$
 Γ^\perp die zugehörige Gruppe in $G_S \oplus G_M$ bzgl. δ .

Lemma:

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$(\delta | \Gamma^\perp) / \Gamma \approx \prod_{i=1}^r (-q_{S,i} \perp q_{M,i} | \Gamma_i^\perp) / \Gamma_i$$



Die orthogonale Zerlegung von Diskriminantenformen vereinfacht sich, wenn wir folgendes in 1.4.1 bewiesene Resultat benutzen

Satz:

Ist (G, q) eine nicht ausgeartete quadratische Form und $H \subset G$ eine Untergruppe, für die $(H, b|)$ nicht ausgeartet ist, so gilt

$$(G, q) = (H, q|) \perp (H^\perp, q|)$$

Beispiele:

$$(i) \quad q_S = w_{2,2}^5 ; \quad q_M = w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1}$$

$$\delta = -q_S \perp q_M = w_{2,2}^{-5} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \quad \text{mit sign } \delta \equiv 1 \quad (8)$$

Es sind nur $|\Gamma| = 1$ oder $|\Gamma| = 2$ möglich. Beide Fälle treten auf. Für $|\Gamma| = 2$ folgt $(\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma = w_{2,2}^1$, weil $|\Gamma^\perp| |\Gamma|^{-1} = 4$ und $\text{sign } \delta \equiv \text{sign } (\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma$.

$$(ii) \quad q_S = w_{2,2}^5 ; \quad q_M = w_{2,2}^{-5} \perp w_{2,1}^1$$

$$\delta = -q_S \perp q_M = w_{2,2}^{-5} \perp w_{2,2}^{-5} \perp w_{2,1}^1$$

$$= (C_4, (-\frac{5}{4})) \perp (C_4, (-\frac{5}{4})) \perp (C_2, (\frac{1}{2}))$$

$|\Gamma| = 2$ tritt auf

$\Gamma = \{0, (2, 2, 0)\} \subset C_4 \oplus C_4 \oplus C_2$ ist die einzige Möglichkeit für Γ . Das Lemma zeigt, daß in $(\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma = w_{2,1}^1$ als orthogonaler Summand auftritt.

Weil $\text{sign } \delta \equiv \text{sign } (\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma \equiv -1 \quad (8)$ und $|\Gamma^\perp| |\Gamma|^{-1} = 8$ folgt

$$(\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma = w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^1.$$

$|\Gamma| = 4$ tritt auf: Hierzu beachte man die folgende Relation aus 1.1.3

$$w_{2,2}^{-5} \perp w_{2,1}^1 = w_{2,2}^5 \perp w_{2,1}^{-1}$$

Die Betrachtung der Ordnungen und des Signums zeigt, daß

$$(\delta|\Gamma^\perp)/\Gamma = w_{2,1}^{-1}.$$

IV.2 Die Untersuchung der transversalen Scheibe

IV.2.1 Konstruktion verseller Entfaltungen und transversaler Scheiben

Für eine quasihomogene Funktion f ist $f \in \mathcal{M}_{\Delta f}$ (Euler-Gleichung). Deshalb fallen die Begriffe R -verselle und K -verselle Entfaltung bzw. R -transversale und K -transversale Scheibe für solche f zusammen. Weil wir in der Analyse der Gleichungen nur transversale Scheiben und verselle Entfaltungen für quasihomogene Funktionen benötigen, beschränken wir uns im folgenden auf den Fall der R -Äquivalenz. Für die Konstruktion R -transversaler Scheiben bzw. R -verseller Entfaltungen genügt es, Basen für die \mathbb{C} -Vektorräume

$$\mathcal{M}^2 / \mathcal{M}_{\Delta f} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{O} / \Delta f$$

zu berechnen. Der folgende Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Lemma in I.1.2.3.

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^3(n)$ mit isolierter Singularität in O . Ferner seien $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{M}^2(n)$ so gewählt, daß $\{1, x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_r\}$ eine Basis von $\mathcal{O} / \Delta f$ repräsentieren. Dann repräsentieren

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \psi_1, \dots, \psi_r \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{M}^2 / \mathcal{M}_{\Delta f}$.

□

Es genügt deshalb, Basen für die Vektorräume $\mathcal{O} / \Delta f$ zu berechnen. Für semiquasihomogene Funktionen lassen sich die hierzu nötigen Rechnungen durch die im folgenden dargestellten Überlegungen erheblich vereinfachen. Wir folgen jetzt der Arbeit von Arnold [Ar 2].

Satz:

Ist $f \in \mathcal{M}^2(n)$ eine semiquasihomogene Funktion mit quasihomogenem Hauptteil f_0 , und repräsentieren $\{\psi_1, \dots, \psi_\mu\}$ eine monomiale Basis für $\mathcal{O} / \Delta f_0$, so repräsentieren $\{\psi_1, \dots, \psi_\mu\}$ auch eine Basis für $\mathcal{O} / \Delta f$.

Im folgenden sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ eine quasihomogene Funktion vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit isolierter Singularität in 0. Wir bezeichnen mit

$$E_j \subset \mathcal{O}(n)$$

den von den quasihomogenen Polynomen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; j)$ erzeugten Vektorraum. Weil $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \Delta f < \infty$ und Δf von quasihomogenen Funktionen erzeugt wird, induziert die Einbettung

$$\bigoplus_j E_j \longrightarrow \mathcal{O}(n)$$

einen Vektorraumisomorphismus

$$\bigoplus_j E_j / E_j \cap \Delta f \longrightarrow \mathcal{O} / \Delta f$$

Für die Bestimmung von Basen für $\mathcal{O} / \Delta f$ genügt es deshalb, Basen für $E_j / E_j \cap \Delta f$ zu berechnen.

Es sei

$$\mu_j := \dim_{\mathbb{C}} E_j / E_j \cap \Delta f$$

Es ist

$$\mu(f) = \sum_{j \geq 0} \mu_j < \infty$$

Wir definieren das Poincaré-Polynom $\chi_f(z)$ durch

$$\chi_f(z) := \sum_{j \geq 0} \mu_j z^j$$

Es gilt unter den obigen Voraussetzungen

Satz:

$$(i) \quad \chi_f(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z^{d-w_i} - 1}{z^{w_i} - 1}$$

$$(ii) \quad \mu(f) = \chi_f(1) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{w_i} - 1 \right)$$

(iii) χ_f hat den Grad

$$d_{\max} := \sum_{i=1}^n (d - 2w_i). \text{ Es ist } \mu_{d_{\max}} = 1.$$

IV.2.2 \mathbb{C}^* - Aktion

Für quasihomogene Funktionen läßt sich die Analyse der Gleichungen unter Benutzung der \mathbb{C}^* -Aktion auf transversalen Scheiben erheblich vereinfachen. Die in diesem Abschnitt aufgeführten Resultate sind wesentlicher Bestandteil unserer Rechnungen. Wir werden die Resultate jedoch nur für die Untersuchung der bimodularen exzeptionellen Singularitäten verwenden; für die Untersuchung der quasihomogenen bimodularen Seriensingularitäten werden wir den im nächsten Abschnitt 2.3 beschriebenen Satz von Wirthmüller benutzen. Weil für quasihomogene Funktionen die Begriffe R-transversale und K-transversale Scheibe übereinstimmen, werden wir im folgenden nur noch von transversalen Scheiben sprechen.

In diesem Abschnitt sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ stets eine quasihomogene Funktion vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit isolierter Singularität in 0. Dann gilt

$$f(\lambda \circ x) = \lambda^d f(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}^*, \text{ wobei}$$

$$\lambda \circ (x_1, \dots, x_n) = (\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n).$$

Es sei

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathcal{M}^2(n) \\ t &\longmapsto f + \sum_{j=1}^r t_j \psi_j \end{aligned}$$

eine lineare transversale Scheibe für f . Wir setzen dabei voraus, daß ψ_1, \dots, ψ_r quasihomogene Polynome sind. Mit d_j bezeichnen wir den quasihomogenen Grad von ψ_j bezüglich der Gewichte (w_1, \dots, w_n) . Den Parameterraum \mathbb{C}^r der transversalen Scheibe \bar{T} werden wir mit T bezeichnen. Wir definieren auf T eine \mathbb{C}^* -Aktion durch

$$\lambda \circ (t_1, \dots, t_r) = (\lambda^{\alpha_1} t_1, \dots, \lambda^{\alpha_r} t_r)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(t_1, \dots, t_r) \in T$, wobei $\alpha_j := d - d_j$ ganze Zahlen sind.

Wir haben eine Zerlegung

$$T = T^+ \oplus T^0 \oplus T^-$$

mit

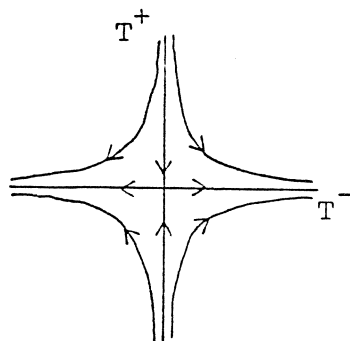
$$T^+ = \{ t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } \alpha_j \leq 0 \}$$

$$T^0 = \{ t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } \alpha_j \neq 0 \}$$

$$T^- = \{ t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } \alpha_j \geq 0 \}$$

Für $\lambda \rightarrow 0$ ist die \mathbb{C}^* -Aktion auf T^+ kontrahierend, auf T^- expandierend.

Bild für $T^0 = 0$:



Aus 2.1 und den in Kapitel V berechneten Poincaré - Polynomen folgt:

Für minimale transversale Scheiben quasihomogener bimodularer Singularitäten ist

$$\dim_{\mathbb{C}} T^0 + \dim_{\mathbb{C}} T^- = 2,$$

wobei

$$\dim_{\mathbb{C}} T^0 = 0 \quad \text{für exzeptionelle Singularitäten}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} T^0 = 1 \quad \text{für Seriensingularitäten.}$$

Lemma 1

(i) $\bar{T}(\lambda \circ t) \sim_K \bar{T}(t)$

(ii) Für $t \in T^+$ gilt $f \xrightarrow{\mu} \bar{T}(t)$

Beweis: Es gilt $\bar{T}(\lambda \circ t)(\lambda \circ x) = \lambda^d \bar{T}(t)(x)$, also sind $\bar{T}(\lambda \circ t)$ und $\bar{T}(t)$ kontaktäquivalent.

Da die \mathbb{C}^* -Aktion auf T^+ kontrahierend ist, folgt (ii). □

Lemma 2

- (i) Ist $t \in T^0 \oplus T^-$ und $|t|$ genügend klein, so gilt $f \underset{\mu}{\sim} \bar{\gamma}(t)$.
- (ii) Es existiert eine Umgebung U von T^+ in T , so daß $\mu(\bar{\gamma}(t)) \leq \mu(f)$ für $t \in U$ gilt.

Beweis:

(i) $A := \{t \in T^0 \mid \mu(\bar{\gamma}(t)) = \infty\} \subset T^0$ ist algebraisch (siehe I.2.4.1). Deshalb ist $V := (T^0 - A) \times T^-$ eine wegzusammenhängende Umgebung der 0 in $T^0 \times T^-$.

Für $t \in V$ ist $\bar{\gamma}(t)$ semiquasihomogen vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ und hat deshalb die Milnorzahl

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{d}{w_j} - 1 \right) = \mu(f) \quad (\text{siehe 2.1}).$$

(ii) folgt aus der Halbstetigkeit der Milnorzahl und Lemma 1. □

Der folgende Satz gestattet es uns, für Beweise der Form $f \xrightarrow[\mu]{} g$ in T^+ an Stelle von T zu untersuchen.

Satz 3

Es seien $f, \bar{\gamma}$ wie oben, $g \in \mathcal{M}^2(n)$. Ferner gelte $f \xrightarrow[\mu]{} g$ mit $\mu(g) < \mu(f)$.

Dann existiert ein $t^0 \in T^+ - \{0\}$, so daß

$$f \xrightarrow[\mu]{} \bar{\gamma}(t^0) \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(t^0) \xrightarrow[\mu]{} g.$$

Beweis:

Nach I.2.4.3 existiert ein holomorpher Abbildungskeim

$$\gamma: (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (T, 0) \quad \text{mit}$$

$$\bar{\gamma}(\gamma(z)) \underset{\mu}{\sim} g \quad \text{für } 0 < |z| \text{ klein.}$$

Auf Grund von Lemma 2 können wir für $0 < |z|$ klein genug

$$\gamma(z) \notin T^0 \times T^-$$

voraussetzen. Es sei

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r).$$

Die Menge $J := \{j \in \{1, \dots, r\} \mid \alpha_j > 0 \text{ und } \gamma_j \neq 0\}$
ist nicht leer.

Für $j \in J$ sei ν_j die Ordnung von γ_j .

Nach einer eventuellen Substitution $z \mapsto z^k$ können wir
o.B.d.A. $\nu_j \alpha_j^{-1} \in \mathbb{N}$ annehmen. Wir setzen

$$m := \min \{ \nu_j \alpha_j^{-1} \mid j \in J \}$$

und wählen einen Index j_0 , für den das Minimum angenommen
wird. Für $0 < |z|$ klein definieren wir

$$\hat{\gamma}(z) := z^{-m} \circ_{\mathbb{C}^*} \gamma(z)$$

$$t^\circ := \lim_{z \rightarrow 0} \hat{\gamma}(z)$$

Es ist $t^\circ \in T^+ - \{0\}$:

$$\alpha_j < 0: \quad \hat{\gamma}_j(z) = z^{-m\alpha_j} \gamma_j(z) \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0$$

$$\alpha_j = 0: \quad \hat{\gamma}_j(z) = \gamma_j(z) \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0$$

$$\alpha_j > 0, j \notin J: \quad \hat{\gamma}_j(z) = \gamma_j(z) = 0$$

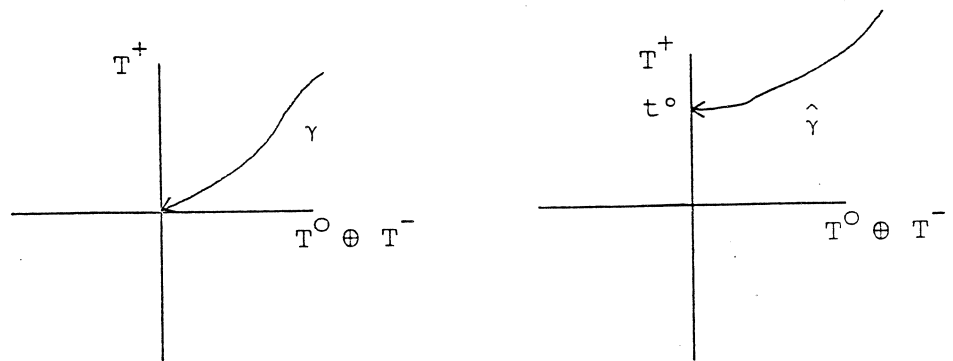
$$\alpha_j > 0, j \in J: \quad \hat{\gamma}_j(z) = z^{-m\alpha_j} \gamma_j(z) \text{ ist eine Potenzreihe} \\ \text{mit Ordnung } \nu_j - m\alpha_j.$$

Nach Konstruktion von m ist $\nu_j - m\alpha_j \geq 0$.

Für $j = j_0$ ist die Ordnung 0, das heißt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \hat{\gamma}_{j_0}(z) \text{ ist von } 0 \text{ verschieden.}$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.



□

Bemerkung 4

- (i) Bei der Anwendung von Satz 3 ist es sinnvoll, nur minimale transversale Scheiben zu betrachten. Für die von uns in Kapitel V angegebenen minimalen transversalen Scheiben gilt $\mu(\bar{\gamma}(t)) < \mu(f)$ für $0 \neq t \in T^+$.
- (ii) Die algebraischen Bedingungen an die Parameter $t \in T$, für die $\bar{\gamma}(t)$ zu einer vorgegebenen Funktion μ -homotop ist, vereinfachen sich bei Einschränkung auf T^+ wesentlich. Sämtliche benötigten Vereinfachungen quasihomogener Singularitäten werden von uns durch Berechnung geeigneter $t \in T^+$ bewiesen. Es erwies sich als zweckmäßig, für die transversale Scheibe alle Monome mit quasihomogenen Grad kleiner als d zu verwenden.
- (iii) Es lassen sich im allgemeinen in T^+ nicht sämtliche μ -Klassen finden, in die sich f μ -vereinfacht. Wir haben das folgende Beispiel gefunden:

Wir betrachten die folgende Familie quasihomogener Funktionen aus $W_{1,0}$

$$f_{a_0} = x^4 + y^5 + a_0 x^2 y^3 \quad \text{mit } a_0 \in H := \mathbb{C} - \{+2, -2\}$$

Dann gilt für $a_0 \in H$ (siehe Kapitel III)

$$\begin{aligned} f_{a_0} &\xrightarrow{\mu} E_{13} && \text{für alle } a_0 \\ f_{a_0} &\xrightarrow{\mu} E_{14} && \iff a_0 = 0 \end{aligned}$$

Im T^+ -Teilraum des Parameterraumes T der von uns in V.2.4 betrachteten minimalen guten transversalen Scheibe für f_0 findet man keine E_{13} -Singularität. Allerdings existiert in T^+ ein \mathbb{C}^* -Orbit, für den die zugehörige Singularität aus E_{14} ist (Rechnung hierzu siehe V.2.4.2).

Eine entsprechende Situation findet man auch bei der Untersuchung von $U_{1,0} \longrightarrow T_{2\ 3\ 8} / T_{2\ 3\ 9}$ (siehe V.2.6.2).

Auf verwandte Phänomene wird ferner zu Beginn von V.2.6 hingewiesen.

Die \mathbb{C}^* -Aktion auf transversalen Scheiben gestattet Aussagen über das Vereinfachungsverhalten semiquasihomogener Singularitäten.

Satz 5

Es seien $f, \bar{\gamma}$ wie oben. Ferner sei ψ_{j_0} ein quasihomogenes Polynom aus $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ mit quasihomogenen Grad $d_{j_0} > d$, das heißt $\alpha_{j_0} < 0$. Es bezeichne

$$L = \{t \in T \mid t_j = 0 \text{ für } j \neq j_0\}$$

die zu ψ_{j_0} gehörende Koordinatenachse. Ist

$$\gamma: [0,1] \longrightarrow T^+ \times L$$

ein stetiger Weg mit

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\gamma(z)) &\underset{\mu}{\sim} g && \text{für } z \in [0,1] \\ \gamma(z) &\notin T^+ && \text{für } z \in (0,1] \\ \gamma(0) &\in T^+ - \{0\}, \end{aligned}$$

so gilt

$$f + \psi_{j_0} \xrightarrow{\mu} g .$$

Beweis:

Mit π_L bzw. π_{T^+} bezeichnen wir die kanonischen Projektionen von T auf L bzw. T^+ . Die Abbildung

$$\rho: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad \rho(z) = z^{-\alpha_{j_0}}$$

ist eine unverzweigte Überlagerung, die die Kurvenliftungseigenschaft besitzt. Es existiert deshalb ein stetiger Weg

$$\begin{aligned} \lambda: (0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \lambda^{-\alpha_{j_0}} j_0 &= \pi_L \circ \gamma \quad \text{auf } (0,1]. \end{aligned}$$

Es gilt $\lambda(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow 0$. Wir definieren eine stetige Abbildung

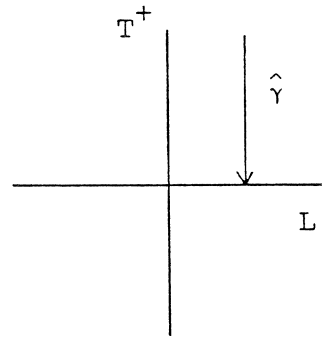
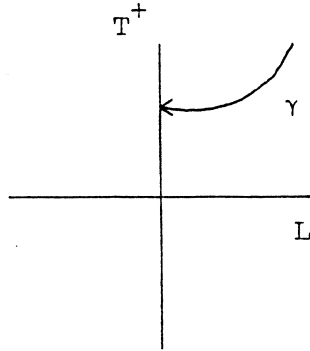
$$\begin{aligned} \hat{\gamma}: (0,1] &\longrightarrow T^+ \times L \\ z &\longmapsto \lambda(z) \circ_{\mathbb{C}^*} \gamma(z) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\pi_L(\lambda(z) \circ_{\mathbb{C}^*} \gamma(z)) = \lambda(z)^{\alpha_j} \circ \pi_L(\gamma(z)) = 1$$

$$\pi_{T^+}(\lambda(z) \circ_{\mathbb{C}^*} \gamma(z)) \longrightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0$$

Nach Lemma 1 ist $\bar{\gamma}(\hat{\gamma}(z)) \sim_{\mu} g$.



□

Die Existenz eines Weges mit den geforderten Eigenschaften werden wir in den Anwendungen von Satz 5 mit einem Dimensionsargument aus der Analyse der Bedingungen an die Parameter $t \in T$, für die $\bar{\gamma}(t) \sim_{\mu} g$ gilt, herleiten. Die Voraussetzungen des folgenden Satzes beschreiben die bei unseren Anwendungen vorliegende Situation. Die Zahl s ist dabei die Anzahl der zusätzlichen Variablen in den Bedingungen an die Parameter $t \in T$.

Satz 6

Es seien $f, g, \bar{\gamma}, \psi_j$ und L wie in dem vorangegangenen Satz. Ferner sei $s \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl, $\pi: T \times \mathbb{C}^s \longrightarrow T$ die kanonische Projektion auf T .

Sind $V_1, V_2 \subset T \times \mathbb{C}^s$ algebraische Mengen mit den Eigenschaften

- (i) $t \in \pi(V_1 - V_2) \implies \bar{\gamma}(t) \sim_{\mu} g$
- (ii) es ex. ein $P \in V_1 - V_2$ mit $\pi(P) \in T^+ - \{0\}$
- (iii) V_1 ist Nullstellenmenge von ℓ Polynomen
- (iv) $\dim(V_1 \cap \pi^{-1}(T^+), P) = \dim_{\mathbb{C}} T \times \mathbb{C}^s - (\ell + \dim_{\mathbb{C}} T^0 + \dim_{\mathbb{C}} T^-)$,

so existiert ein stetiger Weg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow T^+ \times L \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \pi(P) \in T^+ - \{0\} \\ \gamma(z) &\notin T^+ \quad \text{für } z \in (0,1] \\ \bar{\gamma}(\gamma(z)) &\sim_{\mu} g \quad \text{für } z \in [0,1] \end{aligned}$$

Beweis:

Der analytische Mengenkeim $(V_1 \cap \pi^{-1}(T^+), P)$ wird durch $l + \dim_{\mathbb{C}} T^0 + \dim_{\mathbb{C}} T^-$ Gleichungen gegeben.

Wegen (iv) ist er ein vollständiger Durchschnitt, und es gilt

$$\dim(V_1 \cap \pi^{-1}(T^+ \times L), P) = 1 + \dim(V_1 \cap \pi^{-1}(T^+), P).$$

Deshalb existiert ein stetiger Weg

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}: [0,1] &\longrightarrow V_1 \cap \pi^{-1}(T^+ \times L) \quad \text{mit} \\ \hat{\gamma}(z) &\notin \pi^{-1}(T^+) \quad \text{für } z \in (0,1] \\ \hat{\gamma}(z) &\notin V_2 \quad \text{für } z \in [0,1] \\ \hat{\gamma}(0) &= P \end{aligned}$$

Wir setzen $\gamma := \pi \circ \hat{\gamma}: [0,1] \longrightarrow T^+ \times L.$

Es ist $\gamma(0) \in T^+ - \{0\}.$

Wegen (i) gilt

$$\bar{\gamma}(\gamma(z)) \sim_{\mu} g \quad \text{für } z \in [0,1].$$

□

Bemerkung 7

- (i) In Satz 6 genügt die Forderung, daß die Bedingung (i) für Parameter t aus einer Umgebung von T^+ erfüllt ist.
- (ii) Die Sätze 5 und 6 bleiben richtig, wenn wir an Stelle einer transversalen Scheibe

$$\bar{\gamma}(t) = f + \sum_{j=1}^r t_j \psi_j$$

eine Scheibe $\bar{\gamma}'$ verwenden, die aus $\bar{\gamma}$ durch Fortlassen einiger ψ_j entsteht.

- (iii) Wir benutzen Satz 5 und Satz 6 nur bei der Untersuchung der bimodularen exceptionellen Singularitäten.

Bei der Untersuchung der bimodularen semi-quasihomogenen Seriensingularitäten treten teilweise Situationen auf, in denen Bedingung (iv) aus Satz 6 verletzt ist. Man kann jedoch durch eine leichte Modifikation der Voraussetzungen erreichen, daß die Sätze auch in diesen Fällen anwendbar sind.

in Satz 5:

Die Bedingungen an γ lauten jetzt

$$\begin{aligned} \gamma: [0,1] &\longrightarrow T^+ \times T^0 \times L && \text{stetiger Weg mit} \\ \bar{\gamma}(\gamma(z)) &\sim_{\mu} g && \text{für } z \in [0,1] \\ (*) \quad \gamma(z) &\notin T^+ \times T^0 && \text{für } z \in (0,1] \\ \gamma(0) &\in T^+ - \{0\} \end{aligned}$$

in Satz 6:

Wir ersetzen Bedingung (iv) durch

$$\begin{aligned} (iv) \quad \dim (V_1 \cap \pi^{-1}(T^+ \times T^0), P) &= \dim_{\mathbb{C}} T \times \mathbb{C}^S - \\ &(\ell + \dim_{\mathbb{C}} T^-) \end{aligned}$$

Es existiert dann ein γ mit den Eigenschaften (*) und $\gamma(0) = \pi(P)$.

IV.2.3 Ein Resultat von Wirthmüller

2.3.1 Im folgenden sei $f \in \mathcal{M}^2(n)$ eine quasihomogene Funktion vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit isolierter Singularität in 0. Es seien $\psi_1, \dots, \psi_{\mu}$ quasihomogene Polynome bezüglich dieser Gewichtung, die eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{O}/\Delta f$ repräsentieren. Unter diesen Monomen gibt es genau eines mit dem maximalen quasihomogenen Grad

$$d_{\max} = \sum_{i=1}^n (d - 2w_i).$$

Wir setzen voraus, daß ψ_μ dieses Polynom ist. d_{\max} ist der Grad des Poincaré-Polynoms χ_f (siehe 2.1).

Nach Saito [Sa 2], 3.11, gilt

$$\begin{aligned} d_{\max} < d & \iff f \text{ ist } 0\text{-modular} \\ d_{\max} = d & \iff f \text{ ist einfach elliptisch} \\ d_{\max} > d & \text{sonst} \end{aligned}$$

Durch

$$\begin{aligned} F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\mu, 0) & \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, s) & \longmapsto f(x) + \sum_{j=1}^{\mu} s_j \psi_j(x) \end{aligned}$$

wird eine semiuniverselle Entfaltung definiert. Mit

$$\pi_F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\mu, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^\mu, 0)$$

bezeichnen wir die kanonische Projektion auf den Parameterraum der Entfaltung.

K. Wirthmüller hat in seiner Arbeit [Wi] gezeigt, daß im Falle $d_{\max} > d$ die zu F assoziierte Deformation

$$(f^{-1}(0), 0) \xleftarrow{\quad} (F^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} (\mathbb{C}^\mu, 0)$$

topologisch trivial längs der zum Polynom ψ_μ gehörenden Koordinatenachse ist (siehe auch die Arbeit von J. Damon [Da]). Für die Formulierung dieses Satzes führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(S, 0) := (\mathbb{C}^\mu, 0) \text{ für den Parameterraum der Deformation}$$

$$(S', 0) := (\mathbb{C}^\mu, 0) \cap \{s_\mu = 0\}$$

$$F': (\mathbb{C}^n \times S', 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \text{ Entfaltung mit}$$

$$F'(x, s) = f(x) + \sum_{j=1}^{\mu-1} s_j \psi_j(x)$$

Satz: (Wirthmüller [Wi], 2.4, 3.2, 3.6)

Es sei f eine quasihomogene Funktion mit isolierter Singularität in 0 , und d sei kleiner als d_{\max} . Dann gibt es Homöomorphismen $\phi, \hat{\phi}$, so daß mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:

(i) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\bar{F}'^{-1}(0), 0) \times (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\bar{F}^{-1}(0), 0) \\ \downarrow \pi_{\bar{F}'} \times \text{id} & & \downarrow \pi_{\bar{F}} \\ (S', 0) \times (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & (S', 0) \times (\mathbb{C}, 0) = (S, 0) \end{array}$$

kommutiert.

- (ii) Die Einschränkung von ϕ auf $(\bar{F}'^{-1}(0), 0)$ ist die Identität.
Die Einschränkung von $\hat{\phi}$ auf $(S', 0)$ und $(\mathbb{C}, 0)$ ist die Identität.
 $\hat{\phi}$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s', s_\mu) &= (h(s', s_\mu), s_\mu) \quad \text{für} \\ (s', s_\mu) &\in (S', 0) \times (\mathbb{C}, 0). \end{aligned}$$

- (iii) Die Einschränkung von ϕ induziert einen Homöomorphismus

$$(C_{\bar{F}'}, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (C_{\bar{F}}, 0),$$

der die Milnorzahlen der zugehörigen Hyperflächensingularitäten respektiert, das heißt

$$\mu(\bar{F}'(x, s')(\cdot, 0)) = \mu(\bar{F}_\phi(x, s', s_\mu)(\cdot, 0)).$$

Dabei sind $(C_{\bar{F}'}, 0)$ bzw. $(C_{\bar{F}}, 0)$ die kritischen Mengen der zu \bar{F}' bzw. \bar{F} assoziierten Deformationen. □

Folgerung:

Unter den gemachten Voraussetzungen gilt

- (i) f und $f + \psi_\mu$ haben dasselbe Vereinfachungsverhalten bezüglich μ -Vereinfachung.

- (ii) Für die Untersuchung des μ -Vereinfachungsverhalten von f reicht es aus, $(C_{\bar{F}}, 0)$ an Stelle von $(C_{\bar{F}}, 0)$ zu untersuchen.

Beweis der Folgerung:

Die Behauptungen folgen aus dem Resultat von Wirthmüller, wenn man beachtet, daß für festes $(x, s') \in C_{\bar{F}}$, die Funktionen $F_{\phi(x, s', s_{\mu})}(\cdot, 0)$ untereinander μ -homotop sind. \square

2.3.2 Anwendung auf transversale Scheiben

Im folgenden sei $f \in \mathcal{M}^3(n)$ eine quasihomogene Funktion mit isolierter Singularität in 0. Ferner seien $\psi_1, \dots, \psi_{\mu}$ quasihomogene Polynome bezüglich der Gewichtung von f , die eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{O} / \Delta f$ repräsentieren. Die Polynome seien so gewählt, daß

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1 & \psi_j &= x_{j-1} \quad \text{für } 2 \leq j \leq n+1 \\ \psi_j &\in \mathcal{M}^2(n) \quad \text{für } j \geq n+2 & \psi_{\mu} &\text{ hat quasihom. Grad } d_{\max} \end{aligned}$$

Außerdem fordern wir zusätzlich, daß die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Endomorphismen des Vektorraumes

$$V := \langle \psi_1, \dots, \psi_{\mu}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

induzieren.

Wir definieren eine R -semiuniverselle Entfaltung

$$\begin{aligned} \bar{F}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mu}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, s) &\longmapsto f(x) + \sum_{j=1}^{\mu} s_j \psi_j(x) \end{aligned}$$

und eine minimale R -transversale Scheibe

$$\begin{aligned} \bar{T}: (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ t &\longmapsto f + \sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=n+1}^{\mu-1} t_j \psi_{j+1} \end{aligned}$$

Den Parameterraum von \bar{T} bezeichnen wir mit T .

Satz:

Es sei $f \in \mathcal{M}^3(n)$ eine quasihomogene Funktion vom Grade d mit isolierter Singularität in 0 . Ferner sei d_{\max} größer als d und \bar{T} eine wie oben konstruierte transversale Scheibe für f . Für $g \in \mathcal{M}^2(n)$ gilt dann

$$f \xrightarrow{\mu} g \quad \iff \quad \text{In jeder Umgebung der } 0 \text{ in } T \cap \{t_{\mu-1} = 0\} \\ \text{existiert ein } t \text{ mit } \bar{T}(t) \sim_{\mu} g.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Resultat von Wirthmüller und dem folgenden Lemma

Lemma:

Mit den bisherigen Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 2.3.1 und 2.3.2 gilt:

Durch die Vorschrift

$$\theta: (\mathbb{C}_{\bar{F}}, 0) \longrightarrow (T, 0) \\ (x^{\circ}, s^{\circ}) \longmapsto t \quad \text{mit} \quad \bar{T}(t) = \bar{F}_{(x^{\circ}, s^{\circ})}(\cdot, 0)$$

wird ein biholomorpher Abbildungskeim definiert.

Ist d_{\max} größer als d , so induziert die Einschränkung von θ einen biholomorphen Abbildungskeim

$$\theta|_{(\mathbb{C}_{\bar{F}} \cap \{s_{\mu} = 0\}, 0)} \longrightarrow (T \cap \{t_{\mu-1} = 0\}, 0)$$

Beweis:

Wir definieren eine Abbildung

$$\mathcal{R}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mu}, 0) \longrightarrow \mathcal{O}(n) \\ (\tilde{r}, r) \longmapsto f + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{\mu} r_j \psi_j$$

Für $(x^{\circ}, s^{\circ}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mu}$ ist $\bar{F}_{(x^{\circ}, s^{\circ})}(\cdot, 0)$ die Taylorentwicklung von $\bar{F}(\cdot, s^{\circ})$ im Punkte x° , das heißt

$$\bar{F}_{(x^{\circ}, s^{\circ})}(x, 0) = \bar{F}(x+x^{\circ}, s^{\circ}).$$

Auf Grund der Voraussetzungen an V existiert zu $(x^{\circ}, s^{\circ}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mu}$ stets ein (\tilde{r}, r) mit

$$\mathcal{R}(\tilde{r}, r) = \bar{F}_{(x^\circ, s^\circ)}(\cdot, 0).$$

Weil die Polynome ψ_j zusammen mit den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ linear unabhängig sind, ist (\tilde{r}, r) eindeutig bestimmt (I.1.2.3).
Der so definierte Abbildungskeim

$$\hat{\theta}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\mu, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\mu, 0)$$

ist holomorph.

Für $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$ und $s^\circ = (s_1^\circ, \dots, s_\mu^\circ)$ gilt:

$$\bar{F}_{(0, s^\circ)}(x, 0) = \bar{F}(x, s^\circ) = f(x) + s_1^\circ \psi_1(x) + \dots + s_\mu^\circ \psi_\mu(x)$$

$$\bar{F}_{(x^\circ, 0)}(x, 0) = \bar{F}(x+x^\circ, 0) = f(x+x^\circ)$$

ist ein Polynom in x° mit absolutem Glied $f(x)$. Der in x° lineare Anteil ist

$$x_1^\circ \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n^\circ \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Deshalb ist die Jacobi-Matrix von $\hat{\theta}$ in $(0, 0)$ die Einheitsmatrix. $\hat{\theta}$ ist also ein biholomorpher Abbildungskeim.

Die Einschränkung

$$\theta := \hat{\theta}|_{(\mathbb{C}_F, 0)} \longrightarrow (\mathbb{C}_{\tilde{r}}^n \times \mathbb{C}_r^\mu \cap \{r_1 = \dots = r_{n+1} = 0\}, 0)$$

ist ebenfalls biholomorph, weil genau für die kritischen Punkte mit kritischem Wert 0 die Taylorentwicklung aus $\mathcal{M}^2(n)$ ist.

Die Behauptung folgt jetzt aus den Definitionen von \bar{F} , \mathcal{R} , \mathcal{T} und θ . □

IV.2.4 Unabhängigkeit der Stratifikation von T von der gewählten minimalen transversalen Scheibe

Sind $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei minimale transversale Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion für eine quasihomogene Funktion $f \in \mathcal{M}^3(n)$, so liegt folgende Frage nahe:

Existiert ein \mathbb{C}^* -äquivarianter Isomorphismus

$$\varepsilon: (\mathcal{T}_1, 0) \longrightarrow (\mathcal{T}_2, 0) \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_2 \circ \varepsilon(\dot{t}) \sim_K \mathcal{T}_1(t) ?$$

Dabei heißt ε \mathbb{C}^* -äquivariant, wenn

$$\varepsilon(\lambda \circ_{\mathbb{C}^*} t) = \lambda \circ_{\mathbb{C}^*} \varepsilon(t) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}^*, t \in T_1.$$

Es ist nicht das Ziel dieser Arbeit, diese Frage in voller Allgemeinheit zu beantworten. Für bestimmte transversale Scheiben können wir die Frage jedoch bejahen. Wir betrachten im folgenden nur minimale transversale Scheiben, die wie folgt konstruiert werden.

Konstruktion (wie in 2.3.2):

Es sei $f \in \mathcal{M}^3(n)$ eine quasihomogene Singularität vom Typ $(w_1, \dots, w_n; d)$ mit isolierter Singularität in 0. Ferner seien ψ_1, \dots, ψ_μ quasihomogene Polynome bezüglich dieser Gewichtung, die eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{O} / \Delta f$ repräsentieren. Die Polynome seien so gewählt, daß gilt

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1 & \psi_j &= x_{j-1} \quad \text{für } 2 \leq j \leq n+1 \\ \psi_j &\in \mathcal{M}^2(n) \quad \text{für } j \geq n+2 & \psi_\mu &\text{ hat quasihom. Grad } d_{\max} \end{aligned}$$

Außerdem fordern wir zusätzlich, daß die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Endomorphismen des von den ψ_j und $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ aufgespannten i Vektorraumes induzieren.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}: \mathbb{C}^{\mu-1} &\longrightarrow \mathcal{M}^2(n) \\ t &\longmapsto f + \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=n+1}^{\mu-1} t_j \psi_{j+1} \end{aligned}$$

ist eine minimale transversale Scheibe für f .

Die \mathbb{C}^* -Aktion auf dem Parameterraum wird wie in 2.2 definiert.

Satz:

Sind $\bar{\tau}_i: T_i \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$ ($i=1,2$) wie oben konstruierte minimale transversale Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion für ein quasihomogenes $f \in \mathcal{M}^3(n)$, so existiert ein \mathbb{C}^* -äquivarianter Isomorphismus

$$\begin{aligned} \varepsilon: (T_1, 0) &\longrightarrow (T_2, 0) \quad \text{mit} \\ \bar{\tau}_2 \circ \varepsilon(t) &\sim_K \bar{\tau}_1(t) \end{aligned}$$

ε induziert einen Isomorphismus $\varepsilon| (T_1^+, 0) \longrightarrow (T_2^+, 0)$.

Beweis:

(i) Es sei $\bar{T}: T \longrightarrow \mathcal{M}^2(n)$ eine wie oben aus ψ_1, \dots, ψ_μ konstruierte transversale Scheibe.

Wir betrachten die assoziierte semiuniverselle Deformation

$$(f^{-1}(0), 0) \xrightarrow{i} (F^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\pi_{\bar{F}}} (\mathbb{C}^\mu, 0), \text{ wobei}$$

$$\bar{F}(x, s) = f(x) + \sum_{j=1}^{\mu} s_j \psi_j(x)$$

Wir definieren \mathbb{C}^* -Aktionen auf $(f^{-1}(0), 0)$, $(F^{-1}(0), 0)$ und $(\mathbb{C}^\mu, 0)$, so daß i und $\pi_{\bar{F}}$ \mathbb{C}^* -äquivariant werden (man bezeichnet dann $(i, \pi_{\bar{F}})$ als eine semiuniverselle Deformation mit \mathbb{C}^* -Aktion):

$$\lambda \circ x = (\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$$

$$\lambda \circ s = (\lambda^{\beta_1} s_1, \dots, \lambda^{\beta_\mu} s_\mu)$$

$$\lambda \circ (x, s) = (\lambda \circ x, \lambda \circ s)$$

Dabei ist $\beta_j := d$ -quasihomogener Grad (ψ_j) .

Die Abbildung $\theta: (\mathbb{C}_{\bar{F}}, 0) \longrightarrow (T, 0)$ aus 2.3.2 ist dann ein \mathbb{C}^* -äquivarianter Isomorphismus mit

$$\bar{F}_{(x^\circ, s^\circ)}(\cdot, 0) \sim_K \bar{T}(\theta(x^\circ, s^\circ)).$$

(ii) Für zwei semiuniverselle Deformationen (i, π) und (i', π') von $(f^{-1}(0), 0)$ mit \mathbb{C}^* -Aktion existiert ein \mathbb{C}^* -äquivarianter Isomorphismus $(\phi, \hat{\phi})$ (siehe P. Slodowy, [S1], S. 12-13)

$$\begin{array}{ccccc} & & (X', 0) & \xrightarrow{\pi'} & (S', 0) \\ & i' \nearrow & \downarrow \phi & & \downarrow \hat{\phi} \\ (f^{-1}(0), 0) & & (X, 0) & \xrightarrow{\pi} & (S, 0) \end{array}$$

Aus (i) und (ii) folgt die Existenz eines Isomorphismuses

$$\varepsilon: (T_1, 0) \longrightarrow (T_2, 0)$$

mit den geforderten Eigenschaften. □

IV.2.5 Abschließende Bemerkungen

- (i) Um monomiale transversale Scheiben

$$\bar{\tau}(t) = f + \sum_{j=1}^{\mu} t_j \psi_j \quad \psi_j \text{ Monome}$$

zu erhalten, auf die sich das Resultat von Wirthmüller anwenden läßt, lassen wir bei der Konstruktion minimaler transversaler Scheiben in 2.3.2 noch zusätzlich folgende Modifikation zu:

Es sei $\bar{\tau}: \mathbb{C}^{\mu} \longrightarrow \mathbb{M}^2(n)$ eine minimale transversale Scheibe mit \mathbb{C}^* -Aktion, die nach der in 2.3.2 angegebenen Vorschrift konstruiert wurde. $\varepsilon: \mathbb{C}^{\mu} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mu}$ sei ein beliebiger \mathbb{C}^* -äquivarianter \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus. Wir setzen

$$\hat{\tau} := \bar{\tau} \circ \varepsilon$$

$\hat{\tau}$ heißt dann gute transversale Scheibe. Die in 2.2, 2.3 und 2.4 durchgeführten Überlegungen gelten auch für die Scheiben $\hat{\tau}$.

Sämtliche in V.2 angegebene minimale transversale Scheiben sind monomiale gute transversale Scheiben.

- (ii) Die Monome für die in V.2 verwendeten minimalen transversalen Scheiben für die quasihomogenen Funktionen sind so gewählt worden, daß die zugehörigen Scheiben die in II.2.4.4 und II.2.4.5 beschriebene Gestalt haben.
- (iii) Bei den in V.2 benutzten minimalen transversalen Scheiben für die quasihomogenen Funktionen können wir auf Grund von 2.3.2 den zum Monom mit dem quasihomogenen Grad d_{\max} gehörenden Parameter in unseren Untersuchungen o.B.d.A. 0 setzen.
- (iv) Für sämtliche in V.2 angegebenen minimalen transversalen Scheiben $\bar{\tau}$ gilt $\mu(\bar{\tau}(t)) < \mu(\bar{\tau}(0))$ für $t \in T^+ - \{0\}$. Auf Grund der \mathbb{C}^* -Aktion ist lediglich $\bar{\tau}(t) \neq_{\mu} \bar{\tau}(0)$ für $t \in T^+ - \{0\}$ zu kontrollieren. Da die Rechnungen hierzu einfach sind, führen wir sie nicht aus.

IV.3 Ebene Kurvensingularitäten und Reduktion von Flächen- auf Kurvensingularitäten

IV.3.1 Isolierte ebene Kurvensingularitäten

$$g = \sum_{k+l \geq 2} d_{k,l} x^k y^l \in \mathfrak{m}^2(2)$$

habe eine isolierte Singularität in 0. In den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 skizzieren wir, wie man den Kurvenkeim $(g^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ durch quadratische Transformationen auflöst und daraus das System der Multiplizitätensequenzen von $(g^{-1}(0), 0)$ bestimmt. Eine ausführliche Darstellung findet man in [Br 5], Kap. 8.4.

Dieses System der Multiplizitätensequenzen bestimmt eindeutig die μ -Klasse von g (vgl. I.4.3.1). Außer den Klassen W_{17} und $W_{1,2}$ lassen sich die Arnoldschen Klassen in $\mathfrak{m}^2(2)$ der Modularität höchstens zwei bereits durch den in 3.1.3 eingeführten Multiplizitätenbaum unterscheiden.

In 3.1.4 beschreiben wir, wie wir algebraische Bedingungen an die Koeffizienten $d_{k,l}$ von g dafür herleiten, daß g einen vorgegebenen Multiplizitätenbaum besitzt

3.1.1 Die Standardauflösung

Ist M eine komplexe zweidimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so gibt es eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit M' und eine eigentliche, holomorphe, surjektive Abbildung $\pi: M' \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\pi|_{M' \setminus \pi^{-1}(p)}: M' \setminus \pi^{-1}(p) \rightarrow M \setminus \{p\}$ ist biholomorph
- (ii) $\pi^{-1}(p)$ ist eine zu $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ biholomorphe Untermannigfaltigkeit von M' .
- (iii) Sei U eine Koordinatenumgebung von p mit lokalen Koordinaten x, y und $p = (0, 0)$. Dann wird $\pi^{-1}(U)$ überdeckt von zwei Karten U_1 und U_2 mit lokalen

Koordinaten (u_1, v_1) bzw. (u_2, v_2) mit dem Koordinatenwechsel:

$$u_2 = \frac{1}{u_1}, \quad v_2 = u_1 v_1.$$

Auf $\pi^{-1}(U)$ ist π gegeben durch:

$$\pi(u_1, v_1) = (v_1, u_1 v_1) \quad \text{bzw.} \quad \pi(u_2, v_2) = (u_2 v_2, v_2).$$

Ferner ist $\pi^{-1}(p) \cap U_1 = \{v_1 = 0\}$
 und $\pi^{-1}(p) \cap U_2 = \{v_2 = 0\}$.

Definition:

$\pi: M' \longrightarrow M$ heißt quadratische Transformation in p oder σ -Prozeß in p oder Aufblasen des Punktes p .

Habe nun $g \in \mathfrak{m}^2(2)$ eine isolierte Singularität in O . Die irreduziblen Komponenten g_j ($1 \leq j \leq s$) von g sind paarweise verschieden. Sei U eine offene Umgebung von $O \in \mathbb{C}^2$, in der alle g_j und g holomorphe Repräsentanten besitzen, welche wir ebenfalls mit g_j bzw. g bezeichnen. U sei so klein gewählt, daß O der einzige singuläre Punkt von $g^{-1}(O) \subset U$ ist.

Es bezeichne C die Kurve $g^{-1}(O)$, C_j die Zweige $g_j^{-1}(O)$ von C ($1 \leq j \leq s$).

Führen wir einen σ -Prozeß $\pi_1: M_1 \longrightarrow U$ in O aus, so ist $\pi_1^{-1}(C)$ die Vereinigung der exzeptionellen Kurve $\pi_1^{-1}(O)$ und des strikten Urbildes

$$C^1 := \overline{\pi_1^{-1}(C \setminus \{O\})} \quad \text{von } C.$$

C^1 ist außerhalb von $\pi_1^{-1}(O)$ glatt und die Vereinigung der (außerhalb von $\pi_1^{-1}(O)$ disjunkten) strikten Urbilder

$$C_j^1 := \overline{\pi_1^{-1}(C_j \setminus \{O\})} \quad \text{der Kurven } C_j \quad (1 \leq j \leq s).$$

Da jedes g_j irreduzibel ist, ist seine Taylorentwicklung von der Form (vgl. [Br 5], p.662, Lemma 2):

$$g_j = (\alpha x + \beta y)^{v_j} + \sum_{k+l > v_j} a_{kl} x^k y^l \quad \text{mit } (\alpha, \beta) \neq 0, \quad v_j \geq 1.$$

Dabei ist v_j die Multiplizität $v(g_j) = v(C_j, O)$ und $\{\alpha x + \beta y = 0\}$

die "Tangente" des Zweiges C_j in O .

Ist die Taylorentwicklung in U konvergent und o.E. $\alpha \neq 0$, so gilt bezüglich der Karte U_2 mit $(x,y) = (u_2 v_2, v_2)$:

$$g_j \circ \pi = v_2^{v_j} g_j^{(1)} \quad \text{mit}$$

$$g_j^{(1)}(u_2, v_2) := (\alpha u_2 + \beta)^{v_j} + \sum_{k+l > v_j} a_{kl} u_2^k v_2^{k+l-v_j}$$

Es folgt: $g_j^{(1)}$ beschreibt das strikte Urbild C_j^1 in U_2 und $p = (-\beta/\alpha, 0) \in U_2 \cap \pi^{-1}(O)$ ist der einzige Schnittpunkt von C_j^1 mit $\pi^{-1}(O)$. Es gilt: $v(C_j^1, p) \leq v(C_j, O)$.

Wir erhalten eine disjunkte Zerlegung $I = I_1 \cup \dots \cup I_\sigma$ der Indexmenge $I = \{1, \dots, s\}$ mit $I_\rho \neq \emptyset$ für $1 \leq \rho \leq \sigma$, sodaß $j_1, j_2 \in I$ genau dann in derselben Menge I_ρ liegen, wenn die Kurvenzweige $C_{j_1}^1$ und $C_{j_2}^1$ die exzeptionelle Kurve $\pi^{-1}(O)$ im selben Punkt schneiden; also genau dann, wenn C_{j_1} und C_{j_2} dieselbe "Tangente" haben.

Das niedrigste, nichtverschwindende homogene Polynom der Taylorentwicklung von g ist dann

$$\prod_{\rho=1}^{\sigma} (\alpha_\rho x + \beta_\rho y)^{n_\rho} \quad \text{mit} \quad n_\rho := \sum_{j \in I_\rho} v_j, \quad (\alpha_\rho, \beta_\rho) \text{ als}$$

Elemente des $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ paarweise verschieden.

Um eine Standardauflösung von (C, O) zu erhalten, werden wir Punkte auf $\pi^{-1}(O)$ aufblasen, auf der dadurch definierten Mannigfaltigkeit wiederum Punkte aufblasen und so fort:

Definition:

Wir definieren induktiv Mannigfaltigkeiten M_i und holomorphe Abbildungen $\pi_{i+1}: M_{i+1} \longrightarrow M_i, \tau_i: M_i \longrightarrow U$ ($i \geq 0$):

- Es seien $M_0 := U, \tau_0: M_0 \longrightarrow U$ die Identität und $\tau_i := \pi_1 \circ \dots \circ \pi_i: M_i \longrightarrow U$ für $i \geq 1$.
- $\pi_1: M_1 \longrightarrow U$ sei der σ -Prozeß in $O \in U$.
- Für $i \geq 1$ entsteht $\pi_{i+1}: M_{i+1} \longrightarrow M_i$, indem wir die Punkte aus dem Durchschnitt von $\tau_i^{-1}(O)$ und $C^i := \tau_i^{-1}(C \setminus \{O\})$ aufblasen, in denen C^i oder $\tau_i^{-1}(O)$ nicht glatt ist oder die beiden Kurven sich nicht transversal schneiden (d.h. die beiden Kurven

haben in diesen Punkten eine Schnittzahl größer als 1).

Theorem:

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß

- C^N die Kurve $\tau_N^{-1}(0)$ in regulären Punkten transversal schneidet und
- N minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Definition:

$\tau_N: M_N \longrightarrow U$ heißt Standardauflösung von $(C, 0)$ bzw. $g \in \mathfrak{m}^2(2)$.

Bemerkungen und Notationen:

- (i) Sei $i \geq 0$. Die totale Transformierte $\tau_i^{-1}(C)$ ist wiederum die Vereinigung von $\tau_i^{-1}(0)$ und dem strikten Urbild $C^i := \overline{\tau_i^{-1}(C \setminus \{0\})}$ von C . C^i ist die Vereinigung der strikten Urbilder $C_j^i := \overline{\tau_i^{-1}(C_j \setminus \{0\})}$ der Zweige C_j ($1 \leq j \leq s$). Diese sind außerhalb von $\tau_i^{-1}(0)$ paarweise disjunkt. Jedes C_j^i schneidet $\tau_i^{-1}(0)$ in genau einem Punkt.
- (ii) Für jedes $i \geq 0$ erhalten wir eine disjunkte Zerlegung $I = I_1^i \cup \dots \cup I_{\sigma(i)}^i$ der Indexmenge $I = \{1, \dots, s\}$ mit $I_\rho^i \neq \emptyset$ für $1 \leq \rho \leq \sigma(i)$ ($\sigma(0) := 1, I_1^0 := I$), sodaß gilt:
 $j_1, j_2 \in I_\rho^i$ für ein ρ ($1 \leq \rho \leq \sigma(i)$) genau dann, wenn sich $C_{j_1}^i$ und $C_{j_2}^i$ im selben Punkt $p_\rho^i \in \tau_i^{-1}(0)$ schneiden.
Wir sagen: " $C_{j_1}^i$ und $C_{j_2}^i$ haben Kontakt", wenn die Kurven durch denselben Punkt p_ρ^i gehen, andernfalls: " $C_{j_1}^i$ und $C_{j_2}^i$ sind getrennt". Den Schnittpunkt p_ρ^i von C_j^i mit $\tau_i^{-1}(0)$ bezeichnen wir auch mit $p_\rho^i(j)$ und nennen ihn den unendlich benachbarten Punkt von 0 in M_i bezüglich des Zweiges C_j .
- (iii) Sind $C_{j_1}^i$ und $C_{j_2}^i$ getrennt, so auch $C_{j_1}^{i+1}$ und $C_{j_2}^{i+1}$.
Daher ist jedes I_ρ^i disjunkte Vereinigung gewisser Mengen $I_{\rho'}^{i+1}$ der $(i+1)$ -ten Zerlegung der Indexmenge I .

Dabei sind $j_1, j_2 \in I_\rho^i$ genau dann in derselben Indexmenge I_ρ^{i+1} , wenn $C_{j_1}^i$ und $C_{j_2}^i$ dieselbe "Tangente" in p_ρ^i haben.

- (iv) Für $i \geq 1$ ist $\pi_i^{-1}(0)$ eine Vereinigung von zu $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ biholomorphen Untermannigfaltigkeiten von M_i . Diese durch die σ -Prozesse entstandenen Kurven bezeichnen wir als die exzeptionellen Kurven von M_i . Zwei exzeptionelle Kurven schneiden sich transversal in höchstens einem Punkt.
- (v) C^i ist in p_ρ^i singulär, wenn ein C_j^i dort singulär ist oder mehrere C_j^i in p_ρ^i Kontakt haben. Für $i \geq 1$ ist $\pi_i^{-1}(0)$ in p_ρ^i singulär, wenn zwei exzeptionelle Kurven durch p_ρ^i gehen.

3.1.2 Das System der Multiplizitätensequenzen

Es sei eine Standardauflösung von $(C, 0)$ gegeben. Für jede Komponente C_j ($1 \leq j \leq s$) sei $N_j \leq N$ der kleinste Index i , für den $C_j^i \cap \pi_i^{-1}(0)$ in $p_\rho^i(j)$ transversal schneidet und zu keinem strikten Urbild eines anderen Zweiges Kontakt hat.

Für jeden Zweig C_j ist die Folge der Multiplizitäten $(v_j^i)_i := (v(C_j^i, p_\rho^i(j)))_i$ der Keime von C_j^i in $p_\rho^i(j)$ monoton fallend und es gilt: $v_j^i = 1$ für $i \geq N_j$.

Definition:

- (i) Die Folge $(v_j^0, \dots, v_j^{N_j-1})$ heißt die Multiplizitätensequenz des Zweiges $(C_j, 0)$ von $(C, 0)$ ($1 \leq j \leq s$).
- (ii) Die Multiplizitätensequenzen der Zweige $(C_j, 0)$ von $(C, 0)$ ($1 \leq j \leq s$), zusammen mit den Zerlegungen $I = I_1^i \cup \dots \cup I_{\sigma(i)}^i$ für $0 \leq i \leq N-1$, heißt das System der Multiplizitätensequenzen von $(C, 0)$ bzw. $g \in m^2(2)$.

Bemerkung:

- (i) Da die Indizierung der Zweige C_1, \dots, C_s willkürlich ist, ist auch das System der Multiplizitätensequenzen

nur bis auf eine Umnummerierung der Indizes $1, \dots, s$ eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt in den folgenden Definitionen.

- (ii) In [Br 1] werden die Folgen $(v_j^0, \dots, v_j^{N-1})$ als Multiplizitätensequenzen der Zweige C_j verwendet.

Notation:

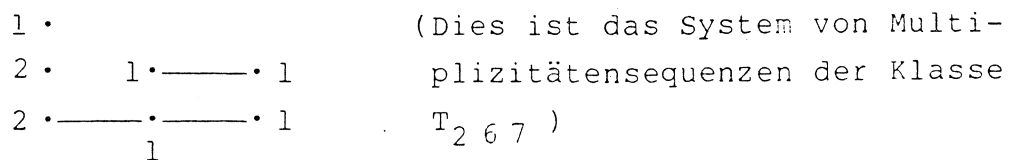
Wir setzen im folgenden o.E. voraus, daß die Indizes $1, \dots, s$ und die Mengen $I_1^i, \dots, I_{\sigma(i)}^i$ ($i \geq 0$) so numeriert sind, daß

- (i) die Indizes in jeder Menge I_ρ^i fortlaufend numeriert sind, d.h.: $I_\rho^i = \{\ell, \ell+1, \dots, \ell+r\}$ für geeignete ℓ, r ,
 (ii) die Mengen $I_1^i, \dots, I_{\sigma(i)}^i$ ($i \geq 0$) gemäß den aufsteigenden Indizes $1, \dots, s$ geordnet sind, d.h.: Aus $j_1 \leq j_2$ und $j_1 \in I_{\rho_1}^i, j_2 \in I_{\rho_2}^i$ folgt: $\rho_1 \leq \rho_2$.

Das System der Multiplizitätensequenzen läßt sich dann wie folgt graphisch darstellen: Der Multiplizitäten-sequenz eines Zweiges $(C_j, 0)$ ordnen wir $N_j - 1$ übereinanderliegende Punkte zu, die von unten nach oben mit $v_j^0, \dots, v_j^{N_j-1}$ bewertet werden, z.B.:

- 1 ($=v_j^3$)
- 1 ($=v_j^2$)
- 2 ($=v_j^1$)
- 2 ($=v_j^0$)

Diese Graphen ordnen wir für wachsenden Index j ($1 \leq j \leq s$) von links nach rechts nebeneinander an. Wir verbinden die mit v_j^i und v_{j+1}^i bewerteten Punkte durch eine Strecke, wenn C_j^i und C_{j+1}^i Kontakt haben (d.h. $j, j+1 \in I_\rho^i(j)$), z.B.:



Eine andere Art der Beschreibung wird durch eine $N \times s$ -Matrix (v_{ij}) mit

$$v_{ij} := \begin{cases} v_j^i & \text{falls } i \leq N_j - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq s),$$

und einer $N \times (s-1)$ -Matrix (μ_{ij}) mit

$$\mu_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } C_j^i \text{ und } C_{j+1}^i \\ & \text{Kontakt haben} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq s-1),$$

gegeben.

Die Arnoldschen Klassen in $m^2(2)$ der Modularität höchstens zwei sind durch die zugehörigen Systeme der Multiplizitätensequenzen eindeutig gekennzeichnet (vgl. I.4.3.1). Ihre Systeme der Multiplizitätensequenzen sind im Anhang A.7 angegeben.

Um diese Klassen durch möglichst wenige Eigenschaften charakterisieren zu können, führen wir nun den Begriff des Multiplizitätenbaumes ein.

3.1.3 Der Multiplizitätenbaum

Wir setzen weiterhin eine Numerierung mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus 3.1.2 voraus.

Ist für $i \geq 0$ die Zerlegung $I = I_1^i \cup \dots \cup I_{\sigma(i)}^i$ der Indexmenge $I = \{1, \dots, s\}$ gegeben, so sei \mathcal{J}^i die Menge aller I_ρ^i ($1 \leq \rho \leq \sigma(i)$), die mindestens zwei Elemente enthalten oder für die ein $j \in I_\rho^i$ mit $v_j^i \geq 2$ existiert. $I_\rho^i \in \mathcal{J}^i$ gilt also genau dann, wenn C^i in p_ρ^i singularär ist.

Jedes I_ρ^i ist die disjunkte Vereinigung gewisser $I_{\rho'}^{i+1}, \dots, I_{\rho'+\lambda}^{i+1}$ der $(i+1)$ -ten Zerlegung von I .

Für $0 \leq \kappa \leq \lambda$ sei

$$n_{\rho, \kappa}^i := \sum_{j \in I_{\rho'+\kappa}^{i+1}} v_j^i$$

n_ρ^i sei das Zahlentupel $(n_{\rho, 0}^i, \dots, n_{\rho, \lambda}^i)$.

Bemerkung:

$n_{\rho, \kappa}^i$ ist also die Summe der Multiplizitäten $v(C_j^i, p_\rho^i)$ derjenigen Kurven C_j^i durch p_ρ^i , die in p_ρ^i dieselbe "Tangente" haben. Wird das strikte Urbild C^i von C in p_ρ^i durch die lokale Gleichung $\tilde{g}(u, v) = 0$, $p_\rho^i = (0, 0)$, beschrieben, so beginnt die Taylorentwicklung von \tilde{g} in $(0, 0)$ mit

$$\sum_{\kappa=0}^{\lambda} \frac{\lambda}{\kappa} (\alpha_\kappa u + \beta_\kappa v)^{\rho, \kappa}, \quad (\alpha_\kappa, \beta_\kappa) \text{ als Elemente des } \mathbb{P}_1(C)$$

paarweise verschieden.

Definition:

Die Mengen $\mathcal{J}^0, \dots, \mathcal{J}^{N-1}$, zusammen mit der Zuordnung $I_\rho^i \longrightarrow n_\rho^i$ ($0 \leq i \leq N-1$, $I_\rho^i \in \mathcal{J}^i$) nennen wir den Multiplizitätenbaum von $(C, 0)$ bzw. $g \in m^2(2)$.

Bemerkung:

Der Multiplizitätenbaum ist aus dem System der Multiplizitäten berechenbar.

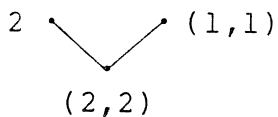
Die Numerierungen $1, \dots, s$ und $I_1^i, \dots, I_{\sigma(i)}^i$ seien nun so gewählt, daß außer den Eigenschaften (i) und (ii) aus der Notation in 3.1.2 gilt:

- (iii) Die Zerlegung $I_\rho^i = I_{\rho'}^{i+1} \cup \dots \cup I_{\rho'+\lambda}^{i+1}$ ist so durchnumeriert, daß bei wachsendem Index $\rho'+\kappa$ ($0 \leq \kappa \leq \lambda$) zunächst die zu \mathcal{J}^{i+1} gehörenden Mengen gezählt werden; d.h. aus $I_{\rho'+\kappa_1}^{i+1} \in \mathcal{J}^{i+1}$ und $I_{\rho'+\kappa_2}^{i+1} \notin \mathcal{J}^{i+1}$ folgt $\kappa_1 < \kappa_2$.

Den Multiplizitätenbaum stellen wir dann graphisch wie folgt dar:
Jedem $I_\rho^i \in \mathcal{J}^i$ ordnen wir für $0 \leq i \leq N-1$ einen mit dem Zahlentupel n_ρ^i bewerteten Punkt zu und ordnen diese, bei wachsendem Index ρ , von links nach rechts nebeneinander. Diese Graphen ordnen wir, unten mit $\mathcal{J}^0 = \{I\}$ beginnend, übereinander an.

Wir verbinden I_ρ^i und $I_{\rho'}^{i+1}$ durch eine Kante, wenn $I_{\rho'}^{i+1} \subset I_\rho^i$.

Z.B. hat die Klasse T_{267} das im Abschnitt 3.1.2 angegebene System von Multiplizitätensequenzen und folgenden Multiplizitätenbaum:



Vergleicht man die Multiplizitätenbäume der Arnoldschen Klassen in $m^2(2)$ mit der Modularität höchstens zwei, so sieht man, daß sie, außer für die Klassen W_{17} und $W_{1,2}$, alle voneinander verschieden sind. Wir erhalten daher:

Satz:

Sei $g \in m^2(2)$ eine isolierte Singularität mit der Modularität höchstens zwei. Hat g den Multiplizitätenbaum

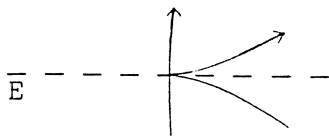
- (1,2)
- 4

so gehört g zu einer der Klassen W_{17} oder $W_{1,2}$. Hat g den Multiplizitätenbaum einer von W_{17} und $W_{1,2}$ verschiedenen Arnoldschen Klasse der Modularität höchstens zwei, so gehört g zu dieser Klasse.

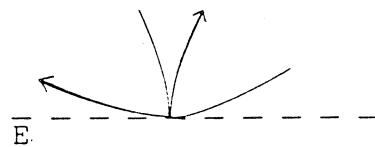
Bemerkung:

- (i) Die Klassen W_{17} und $W_{1,2}$ lassen sich z.B. wie folgt unterscheiden: Bläst man eine Singularität dieser Klassen einmal auf, so besteht das strikte Urbild aus einem glatten Zweig und einer Neilschen Parabel. Gehört nun die Singularität zu W_{17} , so schneidet die glatte Kurve die exzeptionelle Kurve (E) transversal, im anderen Fall tangential:

W_{17}



$W_{1,2}$



(ii) Die Singularitäten $f \in m^2(2)$ der Modularität höchstens zwei haben höchstens die Multiplizität vier. Die Kurvensingularitäten der Multiplizität vier wurden von Arnold [Ar 3] vollständig klassifiziert. Mit den in ([Br 5], p. 699 - 742) beschriebenen Methoden lassen sich systematisch alle möglichen Auflösungsgraphen und die zugehörigen Systeme der Multiplizitätensequenzen der Singularitäten $f \in m^2(2)$ der Multiplizität höchstens vier bestimmen. (Diese entsprechen eineindeutig den von Arnold angegebenen Klassen (vgl. [Si 2] und [Wa]).) Berechnet man daraus die Multiplizitätenbäume, so gehören nur zum Graphen

$$\begin{array}{l} \cdot (1,2) \\ \cdot 4 \\ \vdots \\ \cdot 4 \\ \cdot 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \cdot (1,2) \\ \cdot 4 \\ \vdots \\ \cdot 4 \\ \cdot 4 \end{array}} \right\} k \geq 1$$

verschiedene Systeme von Multiplizitätensequenzen (nämlich die von W_{12k+5} und $W_{k,2}$ ($k \geq 1$)). Insbesondere unterscheiden sich die Multiplizitätenbäume der Klassen der Modularität höchstens zwei von denen aller anderen μ -Klassen.

3.1.4 Ein Verfahren zur Herleitung algebraischer Bedingungen

Es sei $g \in m^2(2)$ eine Singularität mit der in einer offenen Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{C}^2$ konvergenten Taylorentwicklung

$$\sum_{k+\ell \geq 2} d_{k,\ell} u^k v^\ell.$$

Wir beschreiben nun ein Verfahren, mit dem wir induktiv notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten $d_{k,\ell}$ dafür herleiten können, daß g einen vorgegebenen Multiplizitätenbaum besitzt.

Wir gehen, mit $I_1^0 = \{1, \dots, s\}$ und $g_{0,1} := g$ beginnend, nach den folgenden Regeln vor:

1) Es sei $I_\rho^i \in \mathcal{J}^i$ ($0 \leq i < N$) eine Indexmenge, die einem Punkt des Multiplizitätenbaumes entspricht.

Zu I_ρ^i gehört eine Zerlegung $I_\rho^i = I_{\rho'}^{i+1} \cup \dots \cup I_{\rho'+\lambda}^{i+1}$ und ein Zahlentupel $n_\rho^i = (n_{\rho,0}^i, \dots, n_{\rho,\lambda}^i)$. Von der holomorphen Funktion

$$g_{i,\rho} := \sum_{k+l \geq 2} d_{k,l}^{(i,\rho)} u^k v^l$$

sei verlangt, daß sie bezüglich lokaler Koordinaten (u, v) das strikte Urbild C^i der Kurve $g^{-1}(0) \subset U$ im Punkte $p_\rho^i = (0, 0) \in M_i$ entsprechend dem Multiplizitätenbaum beschreibt. Da C^i im Punkt p_ρ^i die Gesamtmultiplizität

$$v := \sum_{\kappa=0}^{\lambda} n_{\rho,\kappa}^i$$

haben soll, erhalten wir die Gleichungen:

$$d_{k,l}^{(i,\rho)} = 0 \quad \text{für } k+l < v.$$

Ferner muß der Tangentialkegel entweder durch

$$(*) \quad \sum_{k+l=v} d_{k,l}^{(i,\rho)} u^k v^l = d_{v,0} \prod_{\kappa=0}^{\lambda} (u - A_{i,\rho'+\kappa} v)^{n_{\rho,\kappa}^i}$$

beschrieben werden, wobei $d_{v,0} \neq 0$ und die $A_{i,\rho'+\kappa}$ für festes i paarweise verschieden sind, oder es gibt einen Index $0 \leq \tilde{\kappa} \leq \lambda$ mit

$$(**) \quad \sum_{k+l=v} d_{k,l}^{(i,\rho)} u^k v^l = d_{v-n,n} v^n \prod_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \neq \tilde{\kappa}}}^{\lambda} (u - A_{i,\rho'+\kappa} v)^{n_{\rho,\kappa}^i},$$

mit $n := n_{\rho,\tilde{\kappa}}^i$, $d_{v-n,n} \neq 0$ und die $A_{i,\rho'+\kappa}$ für festes i paarweise verschieden.

Im Extremfall sind also $\lambda+2$ Fallunterscheidungen möglich. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir für jeden Fall v algebraische Gleichungen an die Koeffizienten $d_{k,l}^{(i,\rho)}$ von $g_{i,\rho}$.

Es bezeichne

$$g'_{i,\rho} := \sum_{k+l \geq v} d_{k,l}^{(i,\rho)} u^k v^l,$$

und G die rechte Seite von (*) bzw. (**).

2) Für jeden Index $0 \leq k \leq \lambda$ fahren wir wie folgt fort:

1. Fall: G hat die Gestalt

$$G = (u - A_{i,\rho'+\kappa} v)^n P(u,v) \text{ mit } n := n_{\rho,\kappa}^i,$$

$P(u,v)$ homogen vom Grad $v-n$, $(u - A_{i,\rho'+\kappa} v)$ kein Linearfaktor von P. Durch den Koordinatenwechsel

$$x := u - A_{i,\rho'+\kappa} v, \quad y := v$$

geht G über in

$$x^n P(x + A_{i,\rho'+\kappa} y, y)$$

und $g'_{i,\rho}$ geht über in

$$\bar{g}_{i+1,\rho'+\kappa} := \sum_{k+l \geq v} \bar{d}_{k,l}^{(i+1,\rho'+\kappa)} x^k y^l.$$

(Dabei ist

$$\bar{d}_{k,l}^{(i+1,\rho'+\kappa)} = \sum_{\ell'=0}^{\ell} \binom{k+\ell'}{k} A_{i,\rho'+\kappa}^{\ell'} d_{k+\ell',\ell-\ell'}^{(i,\rho)}$$

Führen wir einen σ -Prozeß in p_{ρ}^i aus, so muß gelten: Bezüglich lokaler Koordinaten (\tilde{u}, \tilde{v}) mit $(x, y) = (\tilde{u}\tilde{v}, \tilde{v})$ wird das strikte Urbild C^{i+1} in $p_{\rho'+\kappa}^{i+1} = (0, 0)$ beschrieben durch:

$$\hat{g}_{i+1,\rho'+\kappa} = \sum_{k,\ell} d_{k,\ell}^{(i+1,\rho'+\kappa)} \tilde{u}^k \tilde{v}^{\ell} := \sum_{k+l \geq v} \bar{d}_{k,\ell}^{(i+1,\rho'+\kappa)} \tilde{u}^k \tilde{v}^{k+l-v}$$

Entspricht $I_{\rho'+\kappa}^{i+1}$ einem Punkt des Multiplizitätenbaumes, gilt also $I_{\rho'+\kappa}^{i+1} \in \mathcal{J}^{i+1}$, so ist das Verfahren mit

$$g_{i+1,\rho'+\kappa} := G(\tilde{u} - A_{i,\rho'+\kappa}, 1) + \sum_{\substack{\ell > 1 \\ k \geq 0}} d_{k,\ell}^{(i+1,\rho'+\kappa)} \tilde{u}^k \tilde{v}^{\ell}$$

fortzuführen. Andernfalls muß C^{i+1} im Punkt $p_{\rho'+\kappa}^{i+1}$ glatt sein, also $n=1$ oder $d_{0,1}^{(i+1,\rho'+\kappa)} \neq 0$ gelten.

2. Fall: $G = v^n P(u, v)$, $n := n_{\rho, \kappa}^i$, P homogen vom Grad $v-n$,
 v kein Teiler von P .

Wird ein σ -Prozeß in p_{ρ}^i ausgeführt, so muß bezüglich der
 Karte (\tilde{u}, \tilde{v}) mit $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{u}\tilde{v})$ gelten: Das strikte Urbild
 von C^{i+1} wird in $p_{\rho'+\kappa}^{i+1} = (0, 0)$ beschrieben durch:

$$\hat{g}_{i+1, \rho'+\kappa} = \sum_{k, \ell} d_{k, \ell}^{(i+1, \rho'+\kappa)} \tilde{u}^k \tilde{v}^{\ell} := \sum_{k+\ell \geq v} d_{k, \ell}^{(i, \rho)} \tilde{u}^{k+\ell-v} \tilde{v}^{\ell}.$$

bzw.

$$g_{i+1, \rho'+\kappa} := G(1, \tilde{v}) + \sum_{\substack{k > 1 \\ \ell \geq 0}} d_{k, \ell}^{(i+1, \rho'+\kappa)} \tilde{u}^k \tilde{v}^{\ell}$$

Gilt $I_{\rho'+\kappa}^{i+1} \in \mathcal{J}^{i+1}$, so ist das Verfahren mit $g_{i+1, \rho'+\kappa}$
 fortzuführen. Andernfalls muß das strikte Urbild in $p_{\rho'+\kappa}^{i+1}$
 glatt sein, also entweder $n=1$ oder es muß gelten:

$$d_{1,0}^{(i+1, \rho'+\kappa)} \neq 0.$$

- 3) In jeder Ungleichung oder Gleichung sind die Koeffizienten
 $d_{k, \ell}^{(i, \rho)}$ rekursiv durch die Koeffizienten $d_{k, \ell}$ von g auszu-
 drücken.

Bemerkung:

In Regel 1) wurden durch Koeffizientenvergleich aus dem
 Ansatz (*) bzw. (**) v Gleichungen an die Koeffizienten
 von $g_{i, \rho}$ gewonnen. Äquivalente Bedingungen können wir
 wie folgt erhalten:

Für jeden Index $0 \leq \kappa \leq \lambda$ ist der Ansatz

$$\sum_{k+\ell=v} d_{k, \ell}^{(i, \rho)} u^k v^{\ell} = (u - A_{i, \rho'+\kappa} v)^n P(u, v)$$

dazu äquivalent, daß das strikte Urbild von

$$\left\{ \sum_{k+\ell \geq v} d_{k, \ell} u^k v^{\ell} = 0 \right\}$$

nach dem im Fall 1 der Regel 2) beschriebenen Koordi-
 natenwechsel und σ -Prozeß die exzeptionelle Kurve $\{v=0\}$
 in $(0, 0)$ mit der Vielfachheit n schneidet.

Beschreibt

$$\hat{g}_{i+1, \rho'+\kappa} = \sum_{k, \ell} d_{k, \ell}^{(i+1, \rho'+\kappa)} u^k v^\ell$$

dieses strikte Urbild, so muß $\hat{g}_{i+1, \rho'+\kappa}(u, 0)$ also die Ordnung n in 0 haben, d.h. es muß gelten:

$$d_{k, 0}^{(i+1, \rho'+\kappa)} = 0 \quad \text{für } 0 \leq k < n$$

und

$$d_{n, 0}^{(i+1, \rho'+\kappa)} \neq 0.$$

Dabei können wir $d_{k, 0}^{(i+1, \rho'+\kappa)}$ berechnen, indem wir $d_{0, 0}^{(i+1, \rho'+\kappa)}$ k -mal formal nach der Variablen $A_{i, \rho'+\kappa}$ differenzieren und durch $k!$ dividieren.

Entsprechend ist der Ansatz

$$\sum_{k+\ell=v} d_{k, \ell}^{(i, \rho)} u^k v^\ell = v^n P(u, v)$$

im zweiten Fall äquivalent zu:

$$d_{0, \ell}^{(i+1, \rho'+\kappa)} = 0 \quad \text{für } 0 \leq \ell < n$$

und

$$d_{0, n}^{(i+1, \rho'+\kappa)} \neq 0.$$

IV.3.2 Reduktion der Untersuchung von Flächensingularitäten auf Kurvensingularitäten

Definition:

Sei $f(x,y,z) = a(x,y) z^2 + b(x,y) z + c(x,y) \in \mathcal{O}(3)$

Dann bezeichnen wir mit

$$\Delta_z f(x,y) = 4a(x,y) c(x,y) - b^2(x,y) \in \mathcal{O}(2)$$

die Diskriminante von f .

3.2.1 Zur Bestimmung von Flächensingularitäten, deren Korang zwei ist, benutzen wir die folgende Beobachtung von Brieskorn [Br 2] :

Lemma:

Sei $f(x,y,z) = a(x,y) z^2 + b(x,y) z + c(x,y) \in \mathfrak{m}^2(3)$

mit $b, c \in \mathcal{O}(2)$ und $a \in \mathcal{O}^*(2)$ eine Einheit.

Dann gilt:

$$f \sim_K z^2 + \Delta_z f$$

Beweis: Es ist $f \sim_K 4a f$. Substituieren wir

$$z \longmapsto \frac{1}{2a} (z - b) ,$$

so folgt: $4a f = 4a^2 z^2 + 4a b z + 4a c \sim_R z^2 + 4a c - b^2 = z^2 + \Delta_z f \quad \square$

3.2.2 Es sei $f \in \mathfrak{m}^3(3)$ eine isolierte Singularität, deren Tangentialkegel ein Kegel über einer kubischen Kurve in $P_2(\mathbb{C})$ ist, die nicht bezüglich geeigneter Koordinaten durch $\{z^3 = 0\}$ beschrieben wird. (Diese Voraussetzung ist für die uni- und bimodularen Singularitäten $f \in \mathfrak{m}^3(3)$ erfüllt.)
 Bezüglich geeigneter Koordinaten hat f die Gestalt

$$f(x,y,z) = yz^2 + b_1(x)z + c(x,y) \in \mathfrak{m}^3(3),$$

die C.T.C Wall als Pränormalform bezeichnet.

(Dies folgt leicht mit den Methoden aus dem Beweis des Lemmas in 3.2.4.)

In seiner Arbeit [Wa] (§3) klassifiziert er Singularitäten in dieser Pränormalform, indem er die Beziehung zu ihrer

Diskriminante $\Delta_z f$ analysiert und so die Untersuchung auf die Klassifikation von Kurvensingularitäten reduziert. Wir wiederholen im folgenden die von uns verwendeten Resultate der Arbeit.

Theorem (Wall):

Sei $f(x,y,z) = yz^2 + b_1(x)z + c(x,y) \in \mathfrak{m}^3(3)$,
dann gilt für die Milnorzahlen von f und $\Delta_z f$:

$$\mu(f) = \mu(\Delta_z f) - 1.$$

Beweis: [Wa], §7, Theorem 3. □

Korollar:

Sei $f(x,y,z) = a(x,y)z^2 + b(x,y)z + c(x,y) \in \mathfrak{m}^3(3)$
mit $b, c \in \mathcal{O}(2)$ und $a \in \mathfrak{m}(2) - \mathfrak{m}^2(2)$.

Dann gilt:

$$\mu(f) = \mu(\Delta_z f) - 1.$$

Beweis: Wir können o.B.d.A. voraussetzen: $\frac{\partial a}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

Bezeichnen dann

$$\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \text{ bzw.}$$

$$\psi: (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

die Koordinatenwechsel

$$x \longmapsto x, \quad y \longmapsto a(x,y) \text{ bzw.}$$

$$x \longmapsto x, \quad y \longmapsto a(x,y), \quad z \longmapsto z,$$

so gilt:

$$f \circ \psi^{-1} = yz^2 + (b \circ \phi^{-1})z + (c \circ \phi^{-1}) \text{ und}$$

$$\Delta_z (f \circ \psi^{-1}) = 4(c \circ \phi^{-1})y - (b \circ \phi^{-1})^2 = (\Delta_z f) \circ \phi^{-1}.$$

Es sei

$$(b \circ \phi^{-1})(x,y) =: b_1(x) + b_2(x,y)y.$$

Substituieren wir

$$z \longmapsto z - \frac{1}{2} b_2(x,y),$$

so hat dies keinen Einfluß auf die Diskriminante und

überführt $f \circ \psi^{-1}$ in einen Funktionskeim, auf den obiges Theorem anwendbar ist. \square

3.2.3 Es sei

$$F(x, y, z) = yz^2 + b(x, y)z + c(x, y)$$

ein homogenes Polynom dritten Grades, für das die Nullstellenmenge in $P_2(\mathbb{C})$ eine kubische Kurve C ohne mehrfache Komponenten ist. Dann ist $b(x, y) \neq 0$ oder $c(x, y) \neq 0$. Der Punkt $(0, 0, 1)$ ist ein regulärer Punkt von C mit Tangente $\{y = 0\}$.

$\Delta_Z F$ ist ein homogenes Polynom vierten Grades in zwei Veränderlichen. Die Vielfachheiten der verschiedenen Linearfaktoren von $\Delta_Z F$ definieren ein Tupel natürlicher Zahlen

$$v = (v_1, \dots, v_k) \text{ mit } v_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^k v_i = 4, k \leq 4,$$





das den Typ von $\Delta_Z F$ (gemäß der Einteilung in Kapitel I, 3.2.1) beschreibt.

Die folgenden Tabellen aus [Wa], §3, beschreiben die Beziehung zwischen dem Typ von C und der Partition v von $\Delta_Z F$. Diese Beziehung hängt davon ab, ob die Gerade $\{y = 0\} \subset P_2(\mathbb{C})$ eine Komponente von C ist (diese Fälle sind in den Tabellen mit * gekennzeichnet). Diese Bedingung ist äquivalent zu: Der Punkt $\{y = 0\} \in P_1(\mathbb{C})$ ist eine mehrfache Nullstelle von $\Delta_Z F$ (die entsprechende Vielfachheit v_i ist unterstrichen).

Tabelle I

Typ von C	Partition v
nichtsinguläre Kubik	$o \zeta (1, 1, 1, 1)$
irreduzible Kubik mit Doppelpunkt	$\alpha (2, 1, 1)$
Quadrik mit Gerade in allgem. Lage	$\emptyset (2, 2)$
* Quadrik mit Gerade in allg. Lage	$\emptyset (\underline{2}, 1, 1)$
* drei Geraden in allg. Lage	$\times (\underline{2}, 2)$

Tabelle II

Typ von C		Partition ν
irreduzible Kubik mit Spitze		(3,1)
Quadrik mit Gerade in spezieller Lage		(4)
* Quadrik mit Gerade in spezieller Lage		(<u>3</u> ,1)
* drei Geraden in spezieller Lage		(<u>4</u>)

3.2.4 Für Singularitäten f der Gruppierungen Q und S in einer speziellen Pränormalform untersuchen wir nun die Beziehung der Arnoldschen Klassen von f und $\Delta_z f$. Die Ergebnisse verallgemeinern geringfügig die entsprechenden Resultate aus [Wa], §3.

Definition:

$f \in \mathcal{M}^3(3)$ ist in (Q,S) -Pränormalform, wenn

$$f = yz^2 + b(x,y)z + c(x,y)$$

und wenn die Gerade $\{y=0\} \subset P_2(\mathbb{C})$ weder Komponente noch Wendetangente der durch den Tangentialkegel von f definierten kubischen Kurve in $P_2(\mathbb{C})$ ist, wenn also der Koeffizient vor x^2z in der Taylorentwicklung von f nicht verschwindet.

Bemerkung: Mit den Methoden des folgenden Beweises sieht man, daß jede isolierte Singularität aus der Gruppierung Q oder S rechtsäquivalent zu einer Singularität in (Q,S) -Pränormalform ist.

Lemma:

Es sei $f_t \in \mathcal{M}^3(3)$ ($0 \leq t \leq 1$) eine stetige Familie isolierter Singularitäten mit $\nu(f_t) = 3$ und $\mu(f_t) < k_0$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. f_0 und f_1 seien in (Q,S) -Pränormalform. Für jedes t zerfalle die durch den Tangentialkegel von f_t definierte Kubik C_t nicht vollständig in Geraden, d.h. C_t sei irreduzibel oder die Vereinigung einer irreduziblen Quadrik und einer Geraden. Es existiere ein stetiger Weg $x_t \in P_2(\mathbb{C})$

($0 \leq t \leq 1$) mit $x_0 = x_1 = (0, 0, 1)$, sodaß für jedes t x_t ein regulärer Punkt von C_t ist, der nicht auf einer linearen Komponente von C_t liegt bzw. kein Wendepunkt von C_t ist. Dann existiert eine stetige Familie $\hat{f}_t \in \mathfrak{m}^3(3)$ ($0 \leq t \leq 1$) in (Q, S) -Pränormalform mit $\hat{f}_0 = f_0$, $\hat{f}_1 = f_1$ und $\hat{f}_t \sim_{\mathbb{R}} f_t$ für $0 \leq t \leq 1$.

Beweis: Wir konstruieren induktiv Familien $f_t^{(k)}$ ($3 \leq k \leq k_0$), für die der k -Jet in (Q, S) -Pränormalform ist:

Man sieht leicht, daß es eine stetige Familie linearer Koordinatenwechsel ϕ_t ($0 \leq t \leq 1$) mit $\phi_0 = \phi_1 = \text{id}_{\mathbb{C}^3}$ gibt, so daß ϕ_t den Punkt $(0, 0, 1)$ auf x_t und die Gerade $\{y=0\}$ auf die Tangente von C_t in x_t abbildet. Dann wird der 3-Jet von

$$f_t^{(3)} := f_t \circ \phi_t$$

durch ein homogenes Polynom vom Grad 3

$$F_t(x, y, z) = \lambda_t y z^2 + b_t(x, y)z + c_t(x, y)$$

mit $\lambda_t \in \mathbb{C} - \{0\}$ und von Null verschiedenem Koeffizienten vor $x^2 z$ beschrieben. Wir können o.E. annehmen, daß $\lambda_t = 1$ gilt, also $j_3(f_t^{(3)})$ in (Q, S) -Pränormalform ist.

Für $k \geq 3$ sei $f_t^{(k)}$ gegeben. Da $\frac{\partial F_t}{\partial y} = z^2 + \frac{\partial b_t}{\partial y} z + \frac{\partial c_t}{\partial y}$, läßt sich der homogene Anteil vom Grad $(k+1)$ der Taylorentwicklung von $f_t^{(k)}$ schreiben als

$$v_t(x, y, z) \frac{\partial F_t}{\partial y} + B_t(x, y)z + C_t(x, y),$$

wobei v_t , B_t und C_t stetig von t abhängen, v_t homogen vom Grad $k-1$ ist und $v_0 = v_1 = 0$.

Der Koordinatenwechsel

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto y - v_t(x, y, z), \quad z \mapsto z$$

hängt stetig von t ab. Da

$$F(x, y - v_t, z) = F(x, y, z) - v_t \frac{\partial F_t}{\partial y} \pmod{\mathfrak{m}^{k+2}},$$

sieht man durch Betrachtung der Grade, daß dieser Koordinatenwechsel $f_t^{(k)}$ in eine Familie $f_t^{(k+1)}$ ($0 \leq t \leq 1$) überführt, für die der $(k+1)$ -Jet in (Q, S) -Pränormalform ist.

Haben wir auf diese Weise eine Familie $f_t^{(k_0)}$ ($0 \leq t \leq 1$) konstruiert, so erhalten wir, da alle $f_t^{(k_0)}$ k_0 -bestimmt sind, eine Familie \hat{f}_t mit den geforderten Eigenschaften, indem wir den Anteil der Taylorentwicklung der Ordnung k_0+1 von $f_t^{(k_0)}$ entsprechend abändern. \square

Satz:

Es seien $f, g \in \mathfrak{m}^3(3)$ isolierte Singularitäten in (Q, S) -Pränormalform. Dann sind äquivalent:

- a) Es gibt eine stetige Familie $f_t \in \mathfrak{m}^3(3)$ ($0 \leq t \leq 1$) mit
 - $f_0 = f, f_1 = g$
 - $\mu(f_t) = \mu(g)$ für $t > 0$
 - der Typ des Tangentialkegels von f_t ist für $t > 0$ konstant.
- b) Es gibt eine stetige Familie $h_t \in \mathfrak{m}^4(2)$ ($0 \leq t \leq 1$) mit
 - $h_0 = \Delta_2 f, h_1 = \Delta_2 g$
 - $\mu(h_t) = \mu(\Delta_2 g)$ für $t > 0$.

Beweis:

" \implies ": Es sei f_t eine Familie mit den in a) genannten Eigenschaften. Die durch den Tangentialkegel von f_t definierte Kubik bezeichnen wir mit C_t .

Dann existieren eine Zerlegung

$$0 = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(r)} = 1$$

des Intervalls $[0, 1]$ und Geraden

$$\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(r)} \in P_2(\mathbb{C})$$

mit: - $(0, 0, 1) \in \ell^{(1)}, \ell^{(r)}$.

- Für $1 \leq j \leq r$ und $t^{(j-1)} \leq t \leq t^{(j)}$ schneidet die Gerade $\ell^{(j)}$ die Kubik C_t in genau drei verschiedenen regulären Punkten der Kubik, die keine Wendepunkte sind.

Da die Kubiken C_t nicht vollständig in Geraden zerfallen und da irreduzible algebraische Kurven in $P_2(\mathbb{C})$ unter kleinen Störungen irreduzibel bleiben, folgt mit dem Satz über die stetige Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms (siehe z.B. [Fo], §6, Lemma 2):

Es gibt stetige Wege $x_t^{(j)} \in P_2(\mathbb{C})$ ($1 \leq j \leq r$, $t^{(j-1)} \leq t \leq t^{(j)}$) mit:

- $x_0^{(1)} = x_1^{(r)} = (0, 0, 1)$
- $x_t^{(j)} \in \ell^{(j)} \cap C_t$ ist ein regulärer Punkt von C_t , der nicht auf einer linearen Komponente von C_t liegt und kein Wendepunkt ist.

Nach obigem Lemma existieren also stetige Familien $f_t^{(j)} \in \mathcal{M}^3(3)$ ($1 \leq j \leq r$, $t^{(j-1)} \leq t \leq t^{(j)}$) in (Q, S) -Pränormalform mit

- $f_0^{(1)} = f$, $f_1^{(r)} = g$
- $f_t^{(j)} \sim_R f_t$.

Da eine irreduzible Kubik ohne ihre Singularitäten und Wendepunkte sowie eine irreduzible Quadrik in $P_2(\mathbb{C})$ ohne die Schnittpunkte mit einer Geraden wegzusammenhängend sind, folgt für $1 \leq j \leq r-1$ mit obigem Lemma die Existenz von stetigen Familien $\bar{f}_s^{(j)}$ in (Q, S) -Pränormalform mit

- $\bar{f}_0^{(j)} = f_t^{(j)}$, $\bar{f}_1^{(j)} = f_t^{(j+1)}$
- $\bar{f}_s^{(j)} \sim_R f_t^{(j)}$.

Insgesamt folgt also die Existenz einer stetigen Familie in (Q, S) -Pränormalform mit den in a) genannten Eigenschaften. Übergang zur Diskriminante Δ_z liefert aufgrund der Milnorzahlformel in 3.2.2 eine stetige Familie mit den in b) genannten Eigenschaften.

" \Leftarrow ": Es sei eine Familie h_t ($0 \leq t \leq 1$) mit den in b) genannten Eigenschaften gegeben. Für $t \neq 0$ ist die Milnorzahl von h_t , also das System der Multiplizitätensequenzen und somit der Typ des Tangentialkegels konstant. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$f(x, y, z) = yz^2 + b(x)z + c(x, y),$$

$$g(x, y, z) = yz^2 + \tilde{b}(x)z + \tilde{c}(x, y)$$

und daß alle h_t Polynome sind.

Die Koeffizienten vor x^4 in den Taylorentwicklungen von h_0 und h_1 sind von Null verschieden.

Man sieht leicht, daß dann eine stetige Familie linearer Koordinatenwechsel ϕ_t mit $\phi_0 = \phi_1 = \text{id}_{\mathbb{C}^2}$ existiert, für die gilt: Der Koeffizient vor x^4 in der Taylorentwicklung von

$$h'_t := h_t \circ \phi_t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ist von Null verschieden, d.h.

$$h'_t(x, y) = -B_t(x)x^4 + 4y c_t(x, y)$$

mit $B_t \in \mathcal{O}^*(1)$ eine Einheit und $c_t \in \mathfrak{m}^3(2)$.

Da alle B_t Polynome sind, folgt:

Es gibt eine stetige Familie $b_t \in \mathcal{O}^*(1)$ ($0 \leq t \leq 1$) mit:

- $b_0(x)x^2 = b(x), \quad b_1(x)x^2 = \pm \tilde{b}(x)$
- $b_t^2 = B_t$

Wir setzen

$$f'_t(x, y, z) := yz^2 + b_t(x)x^2z + c_t(x, y)$$

Da $f'_1 \sim_R g$, folgt in diesem Fall die Existenz einer Familie mit den in a) genannten Eigenschaften. □

Theorem:

Es seien $f, g \in \mathfrak{m}^3(3)$ uni- oder bimodulare isolierte Singularitäten aus den Gruppierungen Q und S in (Q, S) -Pränormalform. Dann gilt:

- (i) $f \sim_\mu g \iff \Delta_Z f \sim_\mu \Delta_Z g$
- (ii) $f \xrightarrow[\mu]{} g \iff \Delta_Z f \xrightarrow[\mu]{} \Delta_Z g$
- (iii) f liegt in der Arnoldschen Klasse X der Gruppierung Q oder S genau dann, wenn $\Delta_Z f$ zu der Arnoldschen Klasse $Y \subset \mathfrak{m}^2(2)$ der Gruppierung Z oder W entsprechender folgenden Bijektionen gehört:

	X	\longleftrightarrow	Y	
Q	$T_{3,3,r} \ (r \geq 3)$	\longleftrightarrow	$T_{2,4,r+1} \ (r \geq 3)$	} Z
	$Q_j \ (j=10,11,12,16,17,18)$	\longleftrightarrow	$Z_j \ (j=11,12,13,17,18,19)$	
	$Q_{2,j} \ (j \geq 0)$	\longleftrightarrow	$Z_{1,j} \ (j \geq 0)$	
S	$T_{3,q,r} \ (q,r \geq 4)$	\longleftrightarrow	$T_{2,q+1,r+1} \ (q,r \geq 4)$	} W
	$S_j \ (j=11,12,16,17)$	\longleftrightarrow	$W_j \ (j=12,13,17,18)$	
	$S_{1,j} \ (j \geq 0)$	\longleftrightarrow	$W_{1,j} \ (j \geq 0)$	
	$S_{1,j}^\# \ (j \geq 1)$	\longleftrightarrow	$W_{1,j}^\# \ (j \geq 1)$	

Beweis:

zu (iii): Es sei $X \in \mathcal{M}^2(3)$ eine Klasse aus der Gruppierung Q oder S und $f \in X$ in (Q,S)-Pränormalform.

Wir geben zunächst ein $f' \in X$ in (Q,S)-Pränormalform an, für das besonders leicht zu sehen ist, daß $\Delta_Z f'$ in der Klasse Y gemäß der angegebenen Bijektion ist, und das mit f durch eine stetige Familie mit konstanter Milnorzahl und konstantem Typ des Tangentialkegels verbunden werden kann. $\Delta_Z f$ ist dann μ -homotop zu $\Delta_Z f'$ und - da die Modularität für Kurvensingularitäten eine Invariante unter μ -Homotopie ist - nach I.1.3 ebenfalls in Y.

a) X aus der Gruppierung S; $X \neq T_{pqr}$:
 f ist dann rechtsäquivalent zu einer Singularität f' aus der im Anhang A.1 angegebenen Normalform von X.
 f' ist in (Q,S)-Pränormalform und offenbar gilt $\Delta_Z f' \in Y$ gemäß der angegebenen Bijektion.

b) X aus Gruppierung Q; $X \neq T_{pqr}$:
 f ist rechtsäquivalent zu einem f'' aus der Normalform von X im Anhang A.1. Es ist

$$f''(x,y) = yz^2 + c(x,y),$$

wobei der Koeffizient vor x^3 gleich 1 ist. Offenbar ist $\Delta_Z f'' \in Y$ gemäß obiger Bijektion.

Der Punkt $(0,0,1)$ ist ein Wendepunkt der durch den Tangentialkegel von f'' definierten irreduziblen Kubik C'' mit der Wendetangente $\{y=0\}$.

Da es einen stetigen Weg regulärer Punkte $x_t \in C''$ ($0 \leq t \leq 1$) mit $x_0 = (0,0,1)$ gibt, sodaß x_t für $t \neq 0$ kein Wendepunkt von C'' ist, folgt mit dem Beweis des Lemmas:

Es gibt eine stetige Familie $f_t \in \mathcal{M}^3(3)$ ($0 \leq t \leq 1$) mit:

- $f_0 = f''$
- $f_t \sim_{\mathbb{R}} f''$ ($0 \leq t \leq 1$)
- Für $t \neq 0$ ist f_t in (Q,S) -Pränormalform.

$\Delta_z f_1$ ist μ -homotop zu $\Delta_z f''$ und folglich in derselben Arnoldschen Klasse wie $\Delta_z f''$. Wir setzen $f' := f_1$.

- c) $X = T_{3,3,3}$
Jedes $f \in T_{3,3,3}$ ist bekanntlich rechtsäquivalent zu einer Singularität

$$f'(x,y,z) = yz^2 - x^3 + g_2xy^2 + g_3y^3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

in Weierstraß - Normalform.

Der Beweis folgt also analog wie b).

- d) $X = T_{3,q,r}$, $X \neq T_{3,3,3}$
Die Singularitäten dieser Klassen sind kontaktäquivalent. Für

$$f'(x,y,z) = yz^2 + x(x-y)z + x^q + y^r$$

sieht man leicht

$$f' \in T_{3,q,r}$$

und

$$\Delta_z f' \in T_{2,q+1,r+1}$$

(i) und (ii) folgen analog mit obigem Satz.

□

Bemerkungen:

- a) Entsprechende Aussagen gelten speziell für Singularitäten aus der Gruppierung Q in der speziellen Pränormalform

$$yz^2 + c(x,y) \in \mathcal{M}^3(3),$$

bei der der Koeffizient vor x^3 nicht verschwindet. (Die Gerade $\{y=0\}$ ist bei dieser Pränormalform Wendetangente der durch den Tangentialkegel definierten Kubik.)

- b) Sind f und $g \in \mathcal{M}^3(3)$ aus der Gruppierung S in der anderen möglichen Pränormalform gegeben, bei der die Gerade $\{y=0\}$ eine Komponente der durch den Tangentialkegel definierten kubischen Kurve ist, so folgt mit dem Beweis des Theorems:

$$f \sim_{\mu} g \implies \Delta_z f \sim_{\mu} \Delta_z g.$$

Die Umkehrung ist falsch:

Ist z.B. $f \in T_{3,q,r}$ ($q,r > 3$) in dieser Pränormalform, so folgt $\Delta_z f \in T_{2,4,s}$ mit $s = q + r - 2$ (siehe [Wa], §3).

- c) Für $f \in T_{p,q,r}$ ($p,q,r > 3$) aus der Gruppierung U in Pränormalform gilt:

$$\Delta_z f \in T_{2,p+1,q+r-2} \text{ oder}$$

$$\Delta_z f \in T_{2,q+1,p+r-2} \text{ oder}$$

$$\Delta_z f \in T_{2,r+1,p+q-2},$$

wobei jede dieser Möglichkeiten durch geeignete Wahl von $f \in T_{p,q,r}$ auftritt.