Beiträge zur Hierarchie der bimodularen Singularitäten

- Fortsetzung -

Diplomarbeit
von

Dieter Balkenborg
Richard Bauer
Franz-Josef Bilitewski

KAPITEL V   RECHNUNGEN

V.1   Primitive Einbettungen in Milnorgitter der Gruppierungen E, Z, Q, W, S, U

In den in V.1 aufgeführten Rechnungen verwenden wir folgende Kurzschreibweise:
Seien S, M gerade, nicht ausgeartete Gitter mit Invarianten (s_+, s_-, q_S), (m_+, m_-, q_M). M sei durch (m_+, m_-, q_M) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir schreiben anstelle von

$S \longrightarrow M$ primitiv (bzw. $S \not\longrightarrow M$ primitiv) kurz:

$S \longrightarrow M$ (bzw. $S \not\longrightarrow M$).

Mit δ_1 bezeichnen wir stets die Form $-q_S \perp q_M$.
Abweichend von früheren Sprechweisen bezeichne also δ_i $(i \geq 1)$ <u>nicht</u> die Primärkomponenten einer quadratischen Form.

Eine endliche Form δ_i heißt zulässig für das Paar (S,M), wenn für δ_i ein Paar (H, γ) mit folgenden Eigenschaften existiert:

$H \subset G_S$ Untergruppe
$\gamma: H \longrightarrow G_M$ Gruppenmonomorphismus
$q_M \circ \gamma = q_S \mid H$
$\delta_i \cong (\delta_1 \mid \Gamma^{\perp}) / \Gamma$, wobei Γ den Graphen von γ in $G_S \oplus G_M$ bezeichne.

Eine Menge $\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ zulässiger Formen heißt vollständiges Repräsentantensystem für (S,M), wenn durch sie alle Isomorphieklassen zulässiger Formen für (S,M) repräsentiert werden.

Der Fall $S \longrightarrow M$

Wir geben eine zulässige Form δ_2 an und zeigen mit dem Existenzsatz aus IV.1.3, daß ein gerades Gitter K mit den Invarianten $(m_+ - s_+, m_- - s_-, \delta_2)$ existiert. Wir schreiben kurz: " Es ex. ein K mit $(m_+ - s_+, m_- - s_-, \delta_2)$ " und verifizieren, falls notwendig, die Bedingungen (iii) und (iv) des Satzes. Die Bedingung (i) ist stets erfüllt. Die Überprüfung der Bedingung (ii) wird dem Leser überlassen. Ist $\delta_2 = \delta_1$, so schreiben wir kurz δ.

Der Fall $S \not\rightarrow M$

Es bezeichne $\{\delta_1,\ldots,\delta_r\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem zulässiger Formen. Sie seien so numeriert, daß für die zugehörigen Γ_i gilt: $1 = |\Gamma_1| \leq \ldots \leq |\Gamma_r|$ (die Ordnungen $|\Gamma_i|$ sind durch δ_i bestimmt). Für jedes δ_i zeigen wir mit dem Existenzsatz aus IV.1.3, daß kein gerades Gitter K mit den Invarianten $(m_+-s_+, m_--s_-, \delta_i)$ existiert. Wir schreiben kurz: " Es ex. kein K mit $(m_+-s_+, m_--s_-, \delta_i)$ ". Falls Bedingung (ii) des Satzes verletzt ist, geben wir keine Begründung an. Ist hingegen (iii) oder (iv) verletzt, so geben wir die verletzte Bedingung an. Ist $r = 1$, so schreiben wir kurz δ anstelle von δ_1.

V.1.1 Gruppierung E

Zunächst zeigen wir mit Hilfe von Korollar 4 in IV.1.5 Aussagen folgender Gestalt: $L(Y) \not\rightarrow L(X)$. Dabei sind X, Y und die zugehörigen Diskriminanten disk L(X), disk $L^r(Y)$:= disk (L(Y) / rad L(Y)) der folgenden Tabelle zu entnehmen:

X	$J_{3,0}$	$J_{3,1}$	$J_{3,2}$	$J_{3,3}$	$J_{3,4}$
Y	$T_{2\,3\,11}$	$T_{2\,3\,12}$	$T_{2\,3\,13}$	$T_{2\,3\,14}$	$T_{2\,3\,15}$
disk L(X)	4	-4	4	-4	4
disk L^r(Y)	-5	6	-7	8	-9

X	E_{18}	E_{19}	E_{20}
Y	$T_{2\,3\,13}$	$T_{2\,3\,14}$	$T_{2\,3\,15}$
disk L(X)	3	-2	1
disk L^r(Y)	-7	8	-9

Es verbleibt zu zeigen:

$L(E_{18}) \not\rightarrow L(J_{3,4})$ wobei $L(E_{18})$: $(2,16,w_{3,1}^{-1})$

und $L(J_{3,4})$: $(2,18,u_1)$

$\delta = w_{3,1}^{1} \perp u_1$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p=2$: $\pm 12 \equiv \operatorname{disk} K(u_1) \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

V.1.2 Gruppierung Z

Zunächst zeigen wir mit Hilfe von Korollar 4 in IV.1.5 Aussagen folgender Gestalt: $L(Y) \not\longrightarrow L(X)$. Dabei sind X, Y und die zugehörigen Diskriminanten disk L(X), disk $L^r(Y) := \operatorname{disk}(L(Y)/\operatorname{rad} L(Y))$ der folgenden Tabelle zu entnehmen:

X	$Z_{1,1}$	$Z_{1,4}$	Z_{17}	Z_{18}	Z_{18}
Y	$T_{2\,4\,10}$	$T_{2\,4\,13}$	$T_{2\,4\,11}$	$T_{2\,3\,13}$	$T_{2\,4\,12}$
disk L(X)	8	-8	-6	4	4
disk $L^r(Y)$	-12	18	14	-7	-16

X	Z_{19}	Z_{19}
Y	$T_{2\,3\,14}$	$T_{2\,4\,13}$
disk L(X)	-2	-2
disk $L^r(Y)$	8	18

Sei X eine der Klassen $Z_{1,i}$ $(0 \leq i \leq 3)$. Nach IV.1.5 gilt für jedes gerade, nicht ausgeartete Gitter S:

$$S \perp (0) \longrightarrow L(X) \text{ primitiv} \iff S \perp U \longrightarrow L(X) \text{ primitiv.}$$

<u>$L(Z_{1,0})$:</u> $(2,13,w_{2,1}^{1} \perp v_1) \simeq (2,13,w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1})$.

$L(T_{2\,3\,9}) \not\longrightarrow L(Z_{1,0})$ wobei $Q_{2\,3\,9} \perp U$: $(2,12,w_{3,1}^{1})$

$\delta = w_{3,1}^{-1} \perp (w_{2,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(E_{14}) \not\longrightarrow L(Z_{1,0})$

Da $L(T_{2\,3\,9}) \longrightarrow L(E_{14})$.

<u>$L(Z_{1,2})$:</u> $(2,15,w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

$L(T_{2\,3\,11}) \not\longrightarrow L(Z_{1,2})$ wobei $Q_{2\,3\,11} \perp U$: $(2,14,w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{5,1}^{1} \perp (w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Z_{1,3})$: $(2,16,w_{2,1}^{1} \perp w_{2,2}^{1})$

$L(T_{2\,3\,12}) \not\longrightarrow L(Z_{1,3})$ wobei $Q_{2\,3\,12} \perp U$: $(2,15,w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{1} \perp w_{2,2}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 3$: $-12 \equiv \operatorname{disk} K(w_{3,1}^{1}) \equiv \frac{3}{4}(\mathbb{Z}_3^{*2})$ Widerspruch!

$L(Z_{1,4})$ hat die Invarianten $(2,17,w_{2,1}^{1} \perp u_1)$. Nach Folgerung 5, IV.1.5, gilt für ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter S: $S \perp (0) \longrightarrow L(Z_{1,4})$ primitiv $\Longleftrightarrow$ $S \longrightarrow N_1$ primitiv oder $S \longrightarrow N_2$ primitiv, wobei N_1 bzw. N_2 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind durch die Invarianten $(1,16,w_{2,1}^{1} \perp u_1)$ bzw. $(1,16,w_{2,1}^{1})$.

$L(T_{2\,3\,13}) \longrightarrow L(Z_{1,4})$ wobei $Q_{2\,3\,13}$: $(1,15,w_{7,1}^{1})$

Dies folgt aus $Q_{2\,3\,13} \longrightarrow N_2$:

$\delta = w_{7,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1}$

Es ex. K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 7$: $-14 \equiv \operatorname{disk} K(w_{7,1}^{-1}) \equiv \frac{7}{6}(\mathbb{Z}_7^{*2})$ ✓

$p = 2$: $\pm 14 \equiv \operatorname{disk} K(w_{2,1}^{1}) \equiv 2(\mathbb{Z}_2^{*2})$ ✓

$L(T_{2\,3\,14}) \not\longrightarrow L(Z_{1,4})$

Die Diskriminantenformen von $Q_{2\,3\,14}$ einerseits und N_1 bzw. N_2 andererseits sind verschieden.

$L(E_{18}) \not\longrightarrow L(Z_{1,4})$ wobei $L(E_{18})$: $(2,16,w_{3,1}^{-1})$

$\delta = w_{3,1}^{1} \perp (w_{2,1}^{1} \perp u_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Z_{17}) \not\longrightarrow L(Z_{1,4})$ wobei $L(Z_{17})$: $(2,15,w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{1} \perp u_1)$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{3,1}^{1} \perp u_1$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 12 \equiv \operatorname{disk} K(u_1) \equiv -4 \ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(Z_{17})$:</u> $(2,15,w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$L(T_{2\,3\,12}) \longrightarrow L(Z_{17})$

Das folgt aus der Isomorphie $L(Z_{17}) \simeq Q_{2\,3\,12} \perp U$.

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(Z_{17})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,v_1)$

$\delta = v_1 \perp (w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

V.1.3 Gruppierung Q

Zunächst zeigen wir mit Hilfe von Korollar 4, IV.1.5, Aussagen der Art: $L(Y) \not\longrightarrow L(X)$. Dabei sind X, Y und die zugehörigen Diskriminanten $\operatorname{disk} L(X)$, $\operatorname{disk} L^r(Y) := \operatorname{disk}(L(Y)/\operatorname{rad} L(Y))$ der folgenden Tabelle zu entnehmen:

X	$Q_{2,2}$	$Q_{2,4}$	$Q_{2,4}$	Q_{17}	Q_{18}	Q_{18}
Y	$T_{3\,3\,10}$	$T_{2\,3\,13}$	$T_{3\,3\,12}$	$T_{3\,3\,11}$	$T_{2\,3\,13}$	$T_{3\,3\,12}$
disk L(X)	12	12	12	-6	3	3
disk L^r(Y)	-21	-7	-27	24	-7	-27

Sei X eine der Klassen $Q_{2,i}$ $(0 \leq i \leq 3)$, Q_{16} oder Q_{17}. Nach IV.1.5 gilt für jedes gerade, nicht ausgeartete Gitter S:

$$S \perp (0) \longrightarrow L(X) \text{ primitiv} \iff S \perp U \longrightarrow L(X) \text{ primitiv.}$$

<u>$L(Q_{2,0})$:</u> $(2,12,w_{3,1}^{-1} \perp v_1)$

$L(T_{2\,3\,8}) \not\longrightarrow L(Q_{2,0})$ wobei $Q_{2\,3\,8} \perp U$: $(2,11,w_{2,1}^{-1})$

$\delta = w_{2,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{-1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(E_{13}) \not\longrightarrow L(Q_{2,0})$

Da $L(T_{2\,3\,8}) \longrightarrow L(E_{13})$.

<u>$L(Q_{2,1})$:</u> $(2,13,w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

$L(T_{2\,3\,9}) \not\longrightarrow L(Q_{2,1})$ wobei $Q_{2\,3\,9} \perp U$: $(2,12,w_{3,1}^{1})$

$\delta = w_{3,1}^{-1} \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(E_{14}) \not\longrightarrow L(Q_{2,1})$

Da $L(T_{2\,3\,9}) \longrightarrow L(E_{14})$

<u>$L(Q_{2,2})$:</u> $(2,14,w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

$L(T_{2\,3\,10}) \longrightarrow L(Q_{2,2})$ wobei $Q_{2\,3\,10} \perp U$: $(2,13,w_{2,2}^{5})$

$\delta_1 = w_{2,2}^{-5} \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{5}$

Es ex. K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 3$: $-12 \equiv \text{disk } K(w_{3,1}^{-1}) \equiv \frac{3}{2} (\mathbb{Z}_3^{*2})$ ✓

$p = 2$: $\pm 12 \equiv \text{disk } K(w_{2,2}^{5}) \equiv \frac{4}{5} (\mathbb{Z}_2^{*2})$ ✓

<u>$L(Q_{2,3})$:</u> $(2,15,w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{1})$

$L(T_{2\,3\,11}) \not\longrightarrow L(Q_{2,3})$ wobei $Q_{2\,3\,11} \perp U$: $(2,14, w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{5,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 3$: $-60 \equiv \text{disk } K(w_{3,1}^{-1}) \equiv \frac{3}{2} (\mathbb{Z}_3^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(Q_{2,4})$</u> hat die Invarianten $(2,16, w_{3,1}^{-1} \perp u_1)$. Nach Folgerung 5

in IV.1.5 gilt für ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter S: $S \perp (0) \longrightarrow L(Q_{2,4})$ primitiv $\Longleftrightarrow$ $S \longrightarrow N_1$ oder $S \longrightarrow N_2$ primitiv, wobei N_1 bzw. N_2 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind durch die Invarianten $(1,15,w_{3,1}^{-1} \perp u_1)$ bzw. $(1,15,w_{3,1}^{-1})$.

$L(T_{2\,3\,12}) \longrightarrow L(Q_{2,4})$ wobei $Q_{2\,3\,12}$: $(1,14,\, w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

Dies folgt aus $Q_{2\,3\,12} \longrightarrow N_2$

$\delta_1 = w_{3,1}^{-1} \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,1}^{-1}$

Es ex. K mit $(0,1,\delta_2)$

$L(Q_{16}) \not\longrightarrow L(Q_{2,4})$ wobei $L(Q_{16})$: $(2,14,\, w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{3,1}^{-1} \perp u_1)$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{3,1}^{1} \perp u_1$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$

$p = 2$: $\pm 12 \equiv \operatorname{disk} K(u_1) \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(Q_{16})$:</u> $(2,14,\, w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$L(T_{2\,3\,10}) \not\longrightarrow L(Q_{16})$ wobei $Q_{2\,3\,10} \perp U$: $(2,13,\, w_{2,2}^{5})$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{-1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

<u>$L(Q_{17})$:</u> $(2,15,\, w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1})$

$L(T_{2\,3\,12}) \longrightarrow L(Q_{17})$

folgt aus: $L(Q_{17}) \simeq Q_{2\,3\,12} \perp U$.

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(Q_{17})$

folgt aus: $L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(Z_{17}) \simeq L(Q_{17})$

V.1.4 Gruppierung W

Sei X eine der Klassen $W_{1,i}$ ($0 \leq i \leq 3$), $W^{\#}_{1,i}$ ($1 \leq i \leq 3$), W_{17} oder W_{18}. Nach IV.1.5 gilt für jedes gerade, nicht ausgeartete Gitter S:

$$S \perp (0) \longrightarrow L(X) \text{ primitiv} \iff S \perp U \longrightarrow L(X) \text{ primitiv.}$$

Die folgende Tabelle erfaßt die Resultate

$$L(T_{p\,q\,r}) \not\longrightarrow L(X) \text{ primitiv},$$

die sich aus Korollar 4, IV.1.5, ergeben:

X	$W^{\#}_{1,1}$			$W^{\#}_{1,2}$			
disk L(X)	13			-14			
p q r	2 3 11	2 5 9	2 6 8	2 3 12	2 5 10	2 6 9	2 7 8
disk $Q_{p\,q\,r}$	-5	-17	-20	6	20	24	26

X	$W_{1,0}$	$W^{\#}_{1,3}$					
disk L(X)	-12	15					
p q r	2 5 8	2 3 13	2 4 12	2 5 11	2 6 10	2 7 9	2 8 8
disk $Q_{p\,q\,r}$	14	-7	-16	-23	-28	-31	-32

X	W_{17}		W_{18}				
disk L(X)	-10		7				
p q r	2 3 12	2 6 9	2 4 12	2 5 11	2 6 10	2 7 9	2 8 8
disk $Q_{p\,q\,r}$	6	24	-16	-23	-28	-31	-32

<u>$L(W_{1,1})$:</u> $(2, 14, w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1})$

$L(T_{2\,3\,10}) \not\longrightarrow L(W_{1,1})$ wobei $Q_{2\,3\,10} \perp U$: $(2, 13, w^{5}_{2,2})$

$\delta_1 = w^{-5}_{2,2} \perp (w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w^{1}_{2,2} \perp w^{1}_{3,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 3 \equiv \text{disk}\, K(w^{1}_{2,2}) \equiv 4 \; (\mathbb{Z}^{*2}_{2})$ Widerspruch!

$L(T_{2\,4\,9}) \not\longrightarrow L(W_{1,1})$ wobei $Q_{2\,4\,9} \perp U$: $(2,13,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1})$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$\underline{L(W_{1,2})}$: $(2,15,\ w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

$L(T_{2\,4\,10}) \not\longrightarrow L(W_{1,2})$ wobei $Q_{2\,4\,10} \perp U$: $(2,14,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$

$\underline{L(W_{1,3})}$: $(2,16,\ w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

$L(T_{2\,3\,11}) \not\longrightarrow L(W_{1,3})$ wobei $Q_{2\,3\,11} \perp U$: $(2,14,\ w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{5,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 3 \cdot 5 \cdot 4 \equiv 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{2\,6\,7}) \not\longrightarrow L(W_{1,3})$ wobei $Q_{2\,6\,7} \perp U$: $(2,13,\ w_{2,4}^{5})$

$\delta = w_{2,4}^{-5} \perp (w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,3,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 2^4 2^2 3 \equiv -\frac{16}{5} 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(J_{3,1}) \not\longrightarrow L(W_{1,3})$ wobei $L(J_{3,1})$: $(2,15,\ w_{2,2}^{-5})$

$\delta_1 = w_{2,2}^{5} \perp (w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 3 \equiv 4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(Z_{17}) \not\longrightarrow L(W_{1,3})$ wobei $L(Z_{17})$: $(2,15,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(W_{1,1}^{\#}) \not\longrightarrow L(W_{1,3})$ wobei $L(W_{1,1}^{\#})$: $(2,14,\ w_{13,1}^{1})$

$\delta = w_{13,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 13 \equiv 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(W_{1,2}^{\#})$:</u> $(2,15,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1})$

$L(T_{2\ 4\ 11}) \longrightarrow L(W_{1,2}^{\#})$ wobei $Q_{2\ 4\ 11} \perp U$: $(2,15,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1})$

folgt aus der Isomorphie der Gitter

$L(Z_{1,0}) \not\longrightarrow L(W_{1,2}^{\#})$ wobei $L(Z_{1,0})$: $(2,13,\ w_{2,1}^{1} \perp v_1)$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp v_1) \perp (w_{2,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$

$\delta_2 = v_1 \perp w_{7,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 7 \equiv 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(W_{1,3}^{\#})$:</u> $(2,16,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1})$

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(W_{1,3}^{\#})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,\ v_1)$

$\delta = v_1 \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 5 \equiv 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(Z_{1,2}) \longrightarrow L(W_{1,3}^{\#})$ wobei $L(Z_{1,2})$: $(2,15,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1}) \perp (w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(W_{1,1}) \not\longrightarrow L(W^{\#}_{1,3})$ wobei $L(W_{1,1})$: $(2,14,\ w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1})$

$\delta = (w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1}) \perp (w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{5,1})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 3$: $4 \cdot 9 \cdot 5 \equiv (\frac{3}{2})^2 \ (\mathbb{Z}^{*2}_3)$ Widerspruch!

$\underline{L(W_{17})}$: $(2,15,\ w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1})$

$L(T_{2\ 4\ 10}) \not\longrightarrow L(W_{17})$; $Q_{2\ 4\ 10} \perp U$: $(2,14,\ w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{3,1})$

$\delta = (w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{2\ 7\ 7}) \not\longrightarrow L(W_{17})$ wobei $Q_{2\ 7\ 7} \perp U$: $(2,14,\ w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{7,1})$

$\delta = (w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{7,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 3$: $-3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \equiv -\frac{3}{2} \ (\mathbb{Z}^{*2}_3)$ Widerspruch!

$\underline{L(W_{18})}$: $(2,16,\ w^{1}_{7,1})$

$L(T_{2\ 3\ 13}) \longrightarrow L(W_{18})$ wobei $Q_{2\ 3\ 13} \perp U$: $(2,16,\ w^{1}_{7,1})$

$L(T_{2\ 7\ 8}) \longrightarrow L(W_{18})$ wobei $Q_{2\ 7\ 8} \perp U$: $(2,15,\ w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

$\delta = (w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1}) \perp w^{1}_{7,1}$

Es ex. ein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 7$: $-2 \cdot 13 \cdot 7 \equiv \frac{7}{2} \ (\mathbb{Z}^{*2}_7)$ ✓

$p = 13$: $-2 \cdot 13 \cdot 7 \equiv \frac{13}{4} \ (\mathbb{Z}^{*2}_{13})$ ✓

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(W_{18})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,\ v_1)$

$\delta = v_1 \perp w^{1}_{7,1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 7 \equiv 12 \ (\mathbb{Z}^{*2}_2)$ Widerspruch!

$L(Z_{1,2}) \not\longrightarrow L(W_{18})$ wobei $L(Z_{1,2})$: $(2,15,\ w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1})$

$\delta = (w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1}) \perp w^{1}_{7,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

V.1.5 Gruppierung S

Sei X eine der Klassen $S_{1,i}$ $(0 \leq i \leq 3)$, $S_{1,i}$ $(1 \leq i \leq 3)$, S_{16} oder S_{17}. Nach IV.1.5 gilt für jedes gerade, nicht ausgeartete Gitter S:

$$S \perp (0) \longrightarrow L(X) \text{ primitiv} \iff S \perp U \longrightarrow L(X) \text{ primitiv.}$$

Die folgende Tabelle erfaßt die Resultate

$$L(T_{p\,q\,r}) \not\longrightarrow L(X) \text{ primitiv,}$$

die sich aus Korollar 4, IV.1.5, ergeben:

X	$S^{\#}_{1,1}$	$S^{\#}_{1,2}$	$S^{\#}_{1,3}$				S_{17}
disk L(X)	-22	24	-26				-12
p q r	3 5 7	3 3 10	2 3 12	3 3 11	3 6 8	3 7 7	3 5 9
disk $Q_{p\,q\,r}$	34	-21	6	24	54	56	48

$\underline{L(S_{1,0})}$: $(2,12,\ w^{-1}_{5,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1})$

$L(T_{2\,4\,7}) \not\longrightarrow L(S_{1,0})$ wobei $Q_{2\,4\,7} \perp U$: $(2,11,\ w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,1})$

$\delta = (w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{3,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{5,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Z_{13}) \not\longrightarrow L(S_{1,0})$ wobei $L(Z_{13}) = Q_{2\,4\,7} \perp U$

$\underline{L(S_{1,1})}$: $(2,13,\ w^{-1}_{5,1} \perp w^{5}_{2,2})$

$L(T_{3\,3\,8}) \not\longrightarrow L(S_{1,1})$ wobei $Q_{3\,3\,8} \perp U$: $(2,12,\ w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{5,1})$

$\delta = (w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{5,1}) \perp (w^{-1}_{5,1} \perp w^{5}_{2,2})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$\underline{L(S_{1,2})}$: $(2,14,\ w^{-1}_{5,1} \perp v_1)$

$L(T_{2\,3\,9}) \not\longrightarrow L(S_{1,2})$: wobei $Q_{2\,3\,9} \perp U$: $(2,12,\ w^{1}_{3,1})$

$\delta = w^{-1}_{3,1} \perp (w^{-1}_{5,1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 3 \cdot 5 \cdot 4 \equiv 12\ (\mathbb{Z}^{*2}_{2})$ Widerspruch!

$L(E_{14}) \not\longrightarrow L(S_{1,2})$ wobei $L(E_{14}) = Q_{2\,3\,9} \perp U$

$L(T_{2\,5\,6}) \not\longrightarrow L(S_{1,2})$ wobei $Q_{2\,5\,6} \perp U$: $(2,11,\, w_{2,3}^{-5})$

$\delta = w_{2,3}^{5} \perp (w_{5,1}^{-1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,3,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 8 \cdot 5 \equiv \frac{8}{5}\, 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(W_{13}) \not\longrightarrow L(S_{1,2})$ wobei $L(W_{13}) = Q_{2\,5\,6} \perp U$

$L(S^{\#}_{1,1}) \not\longrightarrow L(S_{1,2})$ wobei $L(S^{\#}_{1,1})$: $(2,13,\, w_{2,1}^{-1} \perp w_{11,1}^{1})$

$\delta = (w_{2,1}^{1} \perp w_{11,1}^{-1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp v_1)$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

<u>$L(S_{1,3})$:</u> $(2,15,\, w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

$L(T_{2\,5\,10}) \longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $Q_{2\,5\,10} \perp U$: $(2,15,\, w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

$L(T_{3\,6\,6}) \longrightarrow L(S_{1,3})$; $Q_{3\,6\,6} \perp U$: $(2,13,\, w_{2,2}^{5} \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

$\delta_1 = (w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

$\delta_2 = w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 3$: $2^2 3^2 5 \equiv (\frac{3}{2})(-\frac{3}{2})\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$ ✓

$L(T_{2\,3\,11}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $Q_{2\,3\,11} \perp U$: $(2,14,\, w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{5,1}^{1} \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{2\,6\,7}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $Q_{2\,6\,7} \perp U$: $(2,13,\, w_{2,4}^{5})$

$\delta = w_{2,4}^{-5} \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4^3 5 \equiv (-\frac{16}{5})(-\frac{4}{5})\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{3\,3\,10}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $Q_{3\,3\,10} \perp U$: $(2,14,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{7,1}^{1})$

$\delta = (w_{7,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \equiv (-\frac{4}{5})\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{3\,5\,8}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $Q_{3\,5\,8} \perp U$: $(2,14,\ w_{41,1}^{-1})$

$\delta = w_{41,1}^{-1} \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 5$: $-4\cdot 5\cdot 41 \equiv \frac{5}{2}\ (\mathbb{Z}_5^{*2})$ Widerspruch!

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,\ v_1)$

$\delta_1 = v_1 \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 5 \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(W_{1,0}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $L(W_{1,0})$: $(2,13,\ w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$:

$p = 2$: $\pm 4^2\, 3\cdot 5 \equiv 4\,(-\frac{4}{5})\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$\delta_2 = v_1 \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 5 \equiv 12\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(S_{1,2}^{\#}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $L(S_{1,2}^{\#})$: $(2,14,\ w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{2,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{1} \perp w_{2,2}^{1} \perp w_{3,1}^{-1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,1}^{1} \perp v_1 \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$

$L(Q_{16}) \not\longrightarrow L(S_{1,3})$ wobei $L(Q_{16})$: $(2,14,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta = (w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

<u>$L(S^{\#}_{1,1})$:</u> $(2,13,\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{11,1}^{1})$

$L(T_{2\,4\,8}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,1})$ wobei $Q_{2\,4\,8} \perp U$: $(2,12,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{11,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{1} \perp w_{11,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 11 \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

<u>$L(S^{\#}_{1,2})$:</u> $(2,14,\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$ (Nachtrag S.234)

$L(T_{2\,4\,9}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,2})$ wobei $Q_{2\,4\,9} \perp U$: $(2,13,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 5 \equiv (-\frac{4}{5})\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{2\,5\,8}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,2})$ wobei $Q_{2\,5\,8} \perp U$: $(2,13,\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{7,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 4\cdot 3\cdot 7 \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(Z_{1,0}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,2})$ wobei $L(Z_{1,0})$: $(2,13,\ w_{2,1}^{1} \perp v_1)$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp v_1) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

$\delta_2 = w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1}$

$\delta_3 = v_1 \perp w_{2,2}^{5} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_j)$ für $j = 1,2,3$

$\delta_4 = w_{2,2}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_4)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 3 \equiv 4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(S_{1,1}) \not\longrightarrow L(S_{1,2}^{\#})$ wobei $L(S_{1,1})$: $(2,13,\ w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{5})$

$\delta_1 = (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{5}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = v_1 \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$

<u>$L(S_{1,3}^{\#})$:</u> $(2,15,\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

$L(T_{2\,7\,8}) \longrightarrow L(S_{1,3}^{\#})$ wobei $Q_{2\,7\,8} \perp U$: $(2,15,\ w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

$L(Q_{2,1}) \longrightarrow L(S_{1,3}^{\#})$ wobei $L(Q_{2,1})$: $(2,13,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5})$

$\delta = (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

Es ex. K mit $(0,2,\delta)$:

$w_{2,1}^{-1}$ ist ein orthogonaler Summand von δ

$L(S_{1,1}) \longrightarrow L(S_{1,3}^{\#})$ wobei $L(S_{1,1})$: $(2,13,\ w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{5})$

$\delta = (w_{5,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

Es ex. K mit $(0,2,\delta)$

$w_{2,1}^{-1}$ ist orthogonaler Summand von δ

$L(T_{2\,4\,10}) \not\longrightarrow L(S_{1,3}^{\#})$; $Q_{2\,4\,10} \perp U$: $(2,14,\ w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{2\,5\,9}) \not\longrightarrow L(S_{1,3}^{\#})$ wobei $Q_{2\,5\,9} \perp U$: $(2,14,\ w_{17,1}^{-1})$

$\delta = w_{17,1}^{-1} \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{13,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 13$: $-2 \cdot 17 \cdot 13 \equiv \frac{13}{4}\ (\mathbb{Z}_{13}^{*2})$ Widerspruch!

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,\ v_1)$

$\delta = v_1 \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Q_{2,2}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(Q_{2,2})$: $(2,14,\ w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1})$

$\delta = (w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(W_{1,1}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(W_{1,1})$: $(2,14,\ w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1})$

$\delta_1 = (w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 3$: $-2\cdot 3\cdot 13 \equiv \frac{3}{2}\ (\mathbb{Z}^{*2}_{3})$ Widerspruch!

$L(S_{1,2}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(S_{1,2})$: $(2,14,\ w^{-1}_{5,1} \perp v_1)$

$\delta = (w^{-1}_{5,1} \perp v_1) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Q_{16}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(Q_{16})$: $(2,14,\ w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{3,1})$

$\delta = (w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{3,1}) \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(S_{16}) \not\longrightarrow L(S^{\#}_{1,3})$ wobei $L(S_{16})$: $(2,14,\ w^{-1}_{17,1})$

$\delta = w^{-1}_{17,1} \perp (w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 13$: $-2\cdot 13\cdot 17 \equiv \frac{13}{4}\ (\mathbb{Z}^{*2}_{13})$ Widerspruch!

$\underline{L(S_{16})}$: $(2,14,\ w^{-1}_{17,1})$

$L(T_{2\,5\,9}) \longrightarrow L(S_{16})$ wobei $Q_{2\,5\,9} \perp U$: $(2,14,w^{-1}_{17,1})$

$L(T_{2\,3\,10}) \not\longrightarrow L(S_{16})$ wobei $Q_{2\,3\,10} \perp U$: $(2,13,\, w_{2,2}^{5})$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp w_{17,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 17 \equiv -\frac{4}{5}\,(\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{2\,6\,6}) \not\longrightarrow L(S_{16})$ wobei $Q_{2\,6\,6} \perp U$: $(2,12,\, u_1 \perp w_{3,1}^{1})$

$\delta = (u_1 \perp w_{3,1}^{-1}) \perp w_{17,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 3 \cdot 17 \equiv -4\,(\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{3\,3\,9}) \not\longrightarrow L(S_{16})$; $Q_{3\,3\,9} \perp U$: $(2,13,\, w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp w_{17,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Z_{1,0}) \not\longrightarrow L(S_{16})$ wobei $L(Z_{1,0})$: $(2,13,\, w_{2,1}^{1} \perp v_1)$

$\delta = (w_{2,1}^{-1} \perp v_1) \perp w_{17,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

<u>$L(S_{17})$:</u> $(2,15,\, w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

$L(T_{2\,3\,11}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $Q_{2\,3\,11} \perp U$: $(2,14,\, w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{5,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 4 \cdot 3 \cdot 5 \equiv \frac{4}{5}\,(\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{2\,4\,10}) \not\longrightarrow L(S_{17})$; $Q_{2\,4\,10} \perp U$: $(2,14,\, w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1})$

$\delta_1 = (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$

$L(T_{2\,6\,7}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $Q_{2\,6\,7} \perp U$: $(2,13,\ w_{2,4}^{5})$

$\delta = w_{2,4}^{-5} \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 3\cdot 4^2\, 4 \equiv (-\frac{16}{5})(\frac{4}{5})\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(T_{3\,3\,10}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $Q_{3\,3\,10} \perp U$: $(2,14,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{7,1}^{1})$

$\delta = (w_{3,1}^{1} \perp w_{7,1}^{-1}) \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(J_{3,0}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $L(J_{3,0})$: $(2,14,\ v_1)$

$\delta_1 = v_1 \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 3\cdot 4 \equiv 4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$L(Q_{2,2}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $L(Q_{2,2})$: $(2,14,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1})$

$\delta_1 = (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1}) \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$

$L(W_{1,1}^{\#}) \not\longrightarrow L(S_{17})$ wobei $L(W_{1,1}^{\#})$: $(2,14,\ w_{13,1}^{1})$

$\delta = w_{13,1}^{1} \perp (w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5})$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 3$: $-4\cdot 3\cdot 13 \equiv -\frac{3}{2}\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$ Widerspruch!

$L(Q_{2,0}) \not\longrightarrow L(S_{1,2}^{\#})$ wobei $L(Q_{2,0})$: $(2,12,\ w_{3,1}^{-1} \perp v_1)$

$\delta_1 = (v_1 \perp w_{3,1}^{1}) \perp (w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1})$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 3$: $2\cdot 4\cdot 9 \equiv (-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2})\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$ Widerspruch!

V.1.6 Gruppierung U

$L(U_{16})$ hat die Invarianten $(2,14,\ w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1})$

Nach IV.1.5 gilt für ein gerades nicht ausgeartetes Gitter S:

$$S \perp (O) \longrightarrow L(U_{16}) \text{ primitiv} \iff S \perp U \longrightarrow L(U_{16}) \text{ primitiv}$$

primitive Einbettungen:

$L(T_{3\,3\,8}) \longrightarrow L(U_{16})$ wobei $Q_{3\,3\,8} \perp U$: $(2,12,\ w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1})$

$\delta_1 = w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

$\delta_2 = w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. K mit $(O,2,\delta_2)$

$L(T_{3\,5\,6}) \longrightarrow L(U_{16})$ wobei $Q_{3\,5\,6} \perp U$: $(2,12,\ w_{3,3}^{1})$

$\delta = w_{3,3}^{-1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. K mit $(O,2,\delta)$:

$p = 5$: $3^3 5^2 \equiv \operatorname{disk} K(w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}) \equiv \frac{5}{4}\frac{5}{2}\ (\mathbb{Z}_5^{*2})$ ✓

keine primitiven Einbettungen:

Sei R ein gerades Gitter mit Rang 15 und $5 \nmid \operatorname{disk} R$, $\delta_1 := -q_R \perp q_{U_{16}}$. Es folgt: $\Gamma = \{O\}$, $\ell(\delta_1) \geq \ell(q_{U_{16}}) = 2$.
Somit ist R nicht primitiv in $L(U_{16})$ einbettbar

R	$Q_{2\,3\,10} \perp U$	$Q_{3\,3\,9} \perp U$	$Q_{3\,4\,8} \perp U$	$Q_{4\,5\,6} \perp U$
disk R	-4	-18	-28	-46

R	$Z_{1,0}$	$Q_{2,1}$	$W_{1,0}$	$S^{\#}_{1,1}$
disk R	-8	-12	-12	-22

$L(T_{2\,5\,7}) \not\longrightarrow L(U_{16})$ wobei $Q_{2\,5\,7} \perp U$: $(2,12,\ w_{11,1}^{1})$

$\delta = w_{11,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(O,2,\delta)$:

$p = 5$: $11 \cdot 5^2 \equiv \operatorname{disk} K(w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}) \equiv \frac{5}{4}\frac{5}{2}\ (\mathbb{Z}_5^{*2})$

Widerspruch!

$L(T_{2\,6\,6}) \not\longrightarrow L(U_{16})$ wobei $Q_{2\,6\,6} \perp U$: $(2,12,\, u_1 \perp w_{3,1}^{1})$

$\delta = u_1 \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 2$: $\pm 2^2\, 3\cdot 5^2 \equiv \text{disk}\, K(u_1) \equiv -4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ Widerspruch!

$\underline{L(U_{1,0})}$ hat die Invarianten $(2,12,\, w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1})$

Nach IV.1.5 gilt für ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter S:

$$S \perp (0) \longrightarrow L(U_{1,0}) \text{ primitiv} \iff S \longrightarrow N_1 \text{ primitiv oder } S \longrightarrow N_2 \text{ primitiv},$$

wobei N_1, N_2 die durch die Invarianten $(1,11,\, w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1})$, $(1,11,\, w_{3,1}^{1})$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Gitter sind.

<u>primitive Einbettungen</u>:

$L(T_{2\,3\,9}) \longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $Q_{2\,3\,9}$: $(1,11,\, w_{3,1}^{1})$

Dies folgt aus $Q_{2\,3\,9} \cong N_2$.

$L(T_{2\,5\,6}) \longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $Q_{2\,5\,6}$: $(1,10,\, w_{2,3}^{-5})$

$Q_{2\,5\,6} \longrightarrow N_2$

$\delta = w_{2,3}^{5} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 3$: $-2^3\, 3 \equiv \text{disk}\, K(w_{3,1}^{1}) \equiv -\frac{3}{2}\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$ ✓

$p = 2$: $\pm 2^3\, 3 \equiv \text{disk}\, K(w_{2,3}^{5}) \equiv \frac{8}{5}\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ ✓

$L(T_{3\,5\,5}) \longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $Q_{3\,5\,5}$: $(1,10,\, w_{2,2}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1})$

$Q_{3\,5\,5} \longrightarrow N_2$

$\delta = w_{2,2}^{1} \perp w_{5,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 3$: $-2^2\, 3\cdot 5 \equiv \text{disk}\, K(w_{3,1}^{1}) \equiv -\frac{3}{2}\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$ ✓

$p = 5$: $-2^2\, 3\cdot 5 \equiv \text{disk}\, K(w_{5,1}^{-1}) \equiv \frac{5}{2}\ (\mathbb{Z}_5^{*2})$ ✓

$p = 2$: $\pm 2^2\, 3\cdot 5 \equiv \text{disk}\, K(w_{2,2}^{1}) \equiv 4\ (\mathbb{Z}_2^{*2})$ ✓

<u>keine primitiven Einbettungen:</u>

$L(T_{2\,4\,8}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ disk $Q_{2\,4\,8} = -8$, rg $Q_{2\,4\,8} = 12$

$L(T_{3\,3\,7}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $Q_{3\,3\,7}$: $(1,10, w_{2,2}^{5} \perp w_{3,1}^{-1})$

$Q_{3\,3\,7} \not\longrightarrow N_1$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$Q_{3\,3\,7} \not\longrightarrow N_2$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{4\,4\,6}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ disk $Q_{4\,4\,6} = -32$, rg $Q_{4\,4\,6} = 12$

$L(T_{4\,5\,5}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ disk $Q_{4\,5\,5} = -35$, rg $Q_{4\,5\,5} = 12$

$L(E_{13}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $L(E_{13}) = Q_{2\,3\,8} \perp U$: $(2,11, w_{2,1}^{-1})$

$\delta = w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(W_{12}) \not\longrightarrow L(U_{1,0})$ wobei $L(W_{12}) = Q_{2\,5\,5} \perp U$: $(2,10, w_{5,1}^{-1})$

$\delta = w_{5,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 3$: $3^3\,5 \equiv \text{disk}\, K(w_{3,1}^{1} \perp w_{3,2}^{1}) \equiv -\frac{3}{2}(-\frac{9}{2})\ (\mathbb{Z}_3^{*2})$

Widerspruch!

<u>$L(U_{1,1})$</u> hat die Invarianten $(2,13, w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1})$

Nach IV.1.5 gilt für ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter S:

$S \perp (0) \longrightarrow L(U_{1,1})$ primitiv $\Longleftrightarrow$ $S \perp U \longrightarrow L(U_{1,1})$ primitiv.

<u>primitive Einbettungen</u>:

$L(W_{13}) \longrightarrow L(U_{1,1})$ wobei $L(W_{13}) = Q_{2\,5\,6} \perp U$

$Q_{2\,5\,6} \perp (0) = L(T_{2\,5\,6}) \longrightarrow L(U_{1,0}) \longrightarrow L(U_{1,1})$

<u>keine primitiven Einbettungen</u>:

$L(T_{2\,4\,9}) \not\longrightarrow L(U_{1,1})$ disk $Q_{2\,4\,9} = 10$, rg $Q_{2\,4\,9} \perp U = 15$

$L(T_{3\,3\,8}) \not\longrightarrow L(U_{1,1})$ wobei $Q_{3\,3\,8} \perp U$: $(2,12, w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{1})$

$\delta = w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{3\,5\,6}) \not\longrightarrow L(U_{1,1})$ wobei $Q_{3\,5\,6} \perp U$: $(2,12, w_{3,3}^{1})$

$\delta = w_{3,3}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(T_{4\,4\,7}) \not\longrightarrow L(U_{1,1})$ disk $Q_{4\,4\,7} = 40$, rg $Q_{4\,4\,7} \perp U = 15$

<u>$L(U_{1,2})$</u> hat die Invarianten $(2,14, w_{3,1}^{1} \perp w_{11,1}^{1})$

Nach IV.1.5 gilt für ein gerades nicht ausgeartetes Gitter S:

$S \perp (0) \longrightarrow L(U_{1,2})$ primitiv $\Longleftrightarrow$ $S \perp U \longrightarrow L(U_{1,2})$ primitiv.

<u>primitive Einbettungen</u>:

$L(T_{3\,4\,9}) \longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{3\,4\,9} \perp U$: $(2,14, w_{3,1}^{1} \perp w_{11,1}^{1})$

$Q_{3\,4\,9} \perp U \cong L(U_{1,2})$

<u>keine primitiven Einbettungen</u>:

$L(T_{2\,3\,10}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{2\,3\,10} \perp U$: $(2,13, w_{2,2}^{5})$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{11,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 11$: $-3 \cdot 2^2\, 11 \equiv \text{disk}\, K(w_{11,1}^{1}) \equiv \frac{11}{4} \, (\mathbb{Z}_{11}^{*2})$

Widerspruch!

$L(T_{2\,5\,8}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{2\,5\,8} \perp U$: $(2,13,\ w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{7,1})$

$\delta = w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{7,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 11$: $-2\cdot 3\cdot 7\cdot 11 \equiv \operatorname{disk} K(w^{1}_{11,1}) \equiv \frac{11}{4} (\mathbb{Z}^{*2}_{11})$

Widerspruch!

$L(T_{2\,6\,6}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{2\,6\,6} \perp U$: $(2,12,\ u_1 \perp w^{1}_{3,1})$

$\delta_1 = u_1 \perp w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_1)$:

$p = 2$: $\pm 2^2\, 3^2\, 11 \equiv \operatorname{disk} K(u_1) \equiv -4\ (\mathbb{Z}^{*2}_{2})$ Widerspruch!

$\delta_2 = u_1 \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta_2)$:

$p = 2$: $\pm 2^2\, 11 \equiv \operatorname{disk} K(u_1) \equiv -4\ (\mathbb{Z}^{*2}_{2})$ Widerspruch!

$L(T_{3\,5\,7}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{3\,5\,7} \perp U$: $(2,13,\ w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{17,1})$

$\delta = w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{17,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 17$: $-2\cdot 3\cdot 11\cdot 17 \equiv \operatorname{disk} K(w^{-1}_{17,1}) \equiv \frac{17}{6} (\mathbb{Z}^{*2}_{17})$

Widerspruch!

$L(T_{4\,4\,8}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ $\operatorname{disk} Q_{4\,4\,8} = -48$, $\operatorname{rg} Q_{4\,4\,8} \perp U = 16$

$L(T_{5\,5\,5}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $Q_{5\,5\,5} \perp U$: $(2,13,\ w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{5,1} \perp w^{1}_{5,1})$

$\delta = w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1} \perp w^{-1}_{5,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Z_{1,0}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $L(Z_{1,0})$: $(2,13,\ v_1 \perp w^{1}_{2,1})$

$\delta = v_1 \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$

$L(Q_{2,0}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $L(Q_{2,0})$: $(2,12,\ v_1 \perp w^{-1}_{3,1})$

$\delta = v_1 \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$

Es ex. kein K mit $(0,2,\delta)$:

$p = 3$: $2^2\, 3^2\, 11 \equiv \text{disk}\, K(\, w_{3,1}^{1} \perp w_{3,1}^{1}\,) \equiv (-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2})\,(\mathbb{Z}_3^{*2})$

Widerspruch!

$L(W_{1,0}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $L(W_{1,0})$: $(2,13,\, w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}\,)$

$\delta_1 = w_{2,2}^{1} \perp w_{3,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{11,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_1)$

$\delta_2 = w_{2,2}^{1} \perp w_{11,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta_2)$:

$p = 11$: $-2^2\, 11 \equiv \text{disk}\, K(\, w_{11,1}^{1}\,) \equiv \frac{11}{4}\,(\mathbb{Z}_{11}^{*2})$ Widerspruch!

$L(S_{1,1}) \not\longrightarrow L(U_{1,2})$ wobei $L(S_{1,1})$: $(2,13,\, w_{2,2}^{5} \perp w_{5,1}^{-1}\,)$

$\delta = w_{2,2}^{-5} \perp w_{5,1}^{-1} \perp w_{3,1}^{1} \perp w_{11,1}^{1}$

Es ex. kein K mit $(0,1,\delta)$:

$p = 11$: $-2^2\, 3\cdot 5\cdot 11 \equiv \text{disk}\, K(\, w_{11,1}^{1}\,) \equiv \frac{11}{4}\,(\mathbb{Z}_{11}^{*2})$

Widerspruch!

V.2 Analyse der Gleichungen

Wir benutzen im weiteren die folgende Sprechweise:

Es sei $\sum_{k,\ell} d_{k\ell}^{(j)} u^k v^\ell$ eine Kurvenfamilie, deren Tangentialkegel in (0,0) durch die Gleichung

$$0 = d_{r0}^{(j)} (u-A_1 v)^{r_1} \ldots (u-A_s v)^{r_s} \quad \text{mit } r = \sum_{i=1}^{s} r_i, \; d_{r0}^{(j)} \neq 0, \; j \in \mathbb{N}_0$$

beschrieben wird. Wenn wir sagen

"Wir führen die Substitution $u \longmapsto u + A_1 v$ und einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird durch die Gleichung

$$\sum_{k,\ell} d_{k\ell}^{(j+1)} u^k v^\ell = 0$$

beschrieben."

so sind die neuen Koeffizienten $d_{k\ell}^{(j+1)}$ durch

$$v^r \sum_{k,\ell} d_{k\ell}^{(j+1)} u^k v^\ell = \sum_{k,\ell} d_{k\ell}^{(j)} (uv+A_1 v)^k v^\ell$$

eindeutig bestimmt. Für $d_{k\ell}^{(0)}$ schreiben wir kurz $d_{k\ell}$.

V.2.1 Untersuchung der Klassen $J_{3,0}$, E_{18}, E_{19}, E_{20}

Alle nachzuweisenden Vereinfachungen der E-Gruppierung folgen aus den im Anhang A.5 angegebenen Familien. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Angabe von Normalformen, Poincarépolynomen und Basen der lokalen Ringe.

$J_{3,0}$: Anstelle der von Arnold [Ar 3] angegebenen Normalform

$$f'_{a_0,a_1}(x,y) := x^3 + y^9 + a_0 x^2 y^3 + a_1 x y^7 \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C},\; 4a_0^3 + 27 \neq 0)$$

verwenden wir bei der Angabe der Familien von Vereinfachungen ausschließlich die im folgenden Lemma definierte Normalform.

Lemma:

$$f_{b_0,b_1}(x,y) = x^3 + xy^6 + b_0 x^2 y^3 + b_1 x^2 y^4 \quad (b_0, b_1 \in \mathbb{C},\; b_0^2 \neq 4)$$

ist eine Normalform von $J_{3,0}$.

<u>Beweis:</u> Wir wenden auf $f'_{a_0,0}$ folgende Koordinatentransformation an:

$$x \longrightarrow x + \lambda_0(\gamma y)^3, \qquad y \longrightarrow \gamma y .$$

Dabei sei λ_0 eine Wurzel des Polynoms $\lambda^3 + a_0\lambda^2 + 1 = 0$ und $\gamma^6 := \dfrac{1}{\lambda_0(3\lambda_0 + 2a_0)}$. Mit $b_0 := (3\lambda_0 + a_0)\gamma^3$ $(b_0^2 \neq 4)$ erhält man dann $\tilde{f}_{b_0}(x,y) := x^3 + xy^6 + b_0x^2y^3$. Nun gehört x^2y^4 für alle $b_0 \in \mathbb{C}$ zu einer Basis von $\mathcal{O}(2)/\Delta(\tilde{f}_{b_0})$. deshalb ist nach I.1.4 jede Funktion, deren quasihomogener Teil mit dem von $J_{3,0}$ übereinstimmt, R-äquivalent zu

$$f_{b_0,b_1}(x,y) := x^3 + xy^6 + b_0x^2y^3 + b_1x^2y^4 \quad (b_0,b_1 \in \mathbb{C},\ b_0^2 \neq 4). \qquad \square$$

Der quasihomogene Typ von $J_{3,0}$ ist $(3,1;9)$.
$J_{3,0}$ hat das Poincarépolynom:

$$\chi(t) := t^{10} + t^9 + t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + t + 1$$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so gilt:

j	V_j
0	1
1	y
2	y^2
3	$y^3,\ x$
4	$y^4,\ xy$
5	$y^5,\ xy^2$

j	V_j
6	$y^6,\ xy^3,\ x^2$
7	$y^7,\ xy^4,\ x^2y$
8	$y^8,\ xy^5,\ x^2y^2$
9	$y^9,\ xy^6,\ x^2y^3,\ x^3$
10	$y^{10},\ xy^7,\ x^2y^4,\ x^3y$

<u>Lemma:</u>

Eine von b_0 unabhängige Basis von $\mathcal{O}(2)/\Delta f_{b_0,0}$ ist $\{\, y^k\ (0 \le k \le 7),\ xy^k\ (0 \le k \le 4),\ x^2y^k\ (2 \le k \le 4)\,\}$.

E_{18}, E_{19}, E_{20}:

Für alle Vereinfachungen der Klassen E_{18}, E_{19}, E_{20} verwenden wir die folgenden Normalformen; für

$$E_{18}: \quad f_{1,a_0,a_1}(x,y) := x^3 + y^{10} + a_0xy^7 + a_1xy^8$$

$$E_{19}: \quad f_{2,a_0,a_1}(x,y) := x^3 + xy^7 + a_0y^{11} + a_1y^{12}$$

$$E_{20}: \quad f_{3,a_0,a_1}(x,y) := x^3 + y^{11} + a_0xy^8 + a_1xy^9 \qquad (a_0,a_1 \in \mathbb{C})$$

Die quasihomogenen Typen sind im Fall

E_{18}: (10,3;30)

E_{19}: (7,2;21)

E_{20}: (11,3;33)

Die Poincarépolynome sind für

$$E_{18}: \quad \chi(t) = t^{34} + t^{31} + t^{28} + t^{25} + t^{24} + t^{22} + t^{21} + t^{19} + t^{18} + t^{16} + t^{15} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^{9} + t^{6} + t^{3} + 1$$

$$E_{19}: \quad \chi(t) = t^{24} + t^{22} + t^{20} + t^{18} + t^{17} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^{9} + t^{8} + t^{7} + t^{6} + t^{4} + t^{2} + 1$$

$$E_{20}: \quad \chi(t) = t^{38} + t^{35} + t^{32} + t^{29} + t^{27} + t^{26} + t^{24} + t^{23} + t^{21} + t^{20} + t^{18} + t^{17} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{9} + t^{6} + t^{3} + 1$$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so gilt:

E_{18}:

j	V_j	j	V_j	j	V_j
0	y	13	xy	22	xy^4
3	y^2	15	y^5	24	y^8
6	y^2	16	xy^2	25	xy^5
9	y^3	18	y^6	28	xy^6
10	x	19	xy^3	31	xy^7
12	y^4	21	y^7	34	xy^8

E_{19}:

j	v_j
0	1
2	y
4	y^2
6	y^3
7	x
8	y^4
9	xy

j	v_j
10	y^5
11	xy^2
12	y^6
13	xy^3
14	y^7, x^2
15	xy^4

j	v_j
16	y^8, x^2y
17	xy^5
18	y^9, x^2y^2
20	y^{10}, x^2y^3
22	y^{11}, x^2y^4
24	y^{12}, x^2y^5

E_{20}:

j	v_j
0	1
3	y
6	y^2
9	y^3
11	x

j	v_j
12	y^4
14	xy
15	y^5
17	xy^2
18	y^6

j	v_j
20	xy^3
21	y^7
23	xy^4
24	y^8
26	xy^5

j	v_j
27	y^9
29	xy^6
32	xy^7
35	xy^8
38	xy^9

Lemma:

Folgende Mengen von Monomen $B(f_i)$ bzw. $B'(f_i)$ repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}(2)/\Delta f_{i,0,0}$ bzw. $\mathfrak{m}^2(2)/\mathfrak{m}(2)\Delta f_{i,0,0}$

(i) E_{18}: $B(f_1) = \{ y^k \ (0 \le k \le 8),\ xy^k \ (0 \le k \le 8) \}$

$B'(f_1) = \{ y^k \ (2 \le k \le 9),\ xy^k \ (1 \le k \le 8),\ x^2 \}$

(ii) E_{19}: $B(f_2) = \{ y^k \ (0 \le k \le 12),\ xy^k \ (0 \le k \le 5) \}$

$B'(f_2) = \{ y^k \ (2 \le k \le 12),\ xy^k \ (1 \le k \le 6),\ x^2 \}$

(iii) E_{20}: $B(f_3) = \{ y^k \ (0 \le k \le 9),\ xy^k \ (0 \le k \le 9) \}$

$B'(f_3) = \{ y^k \ (2 \le k \le 10),\ xy^k \ (1 \le k \le 9),\ x^2 \}$

Die zugehörigen transversalen Scheiben der quasihomogenen Singularitäten sind minimale gute transversale Scheiben.

V.2.2 Untersuchung der Klassen $Z_{1,0}$, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}

Zum Beweis der Theoreme 1 und 2 im Kapitel III ist für diese Klassen noch zu beweisen:

$$Z_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$$

$$Z_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}$$

$$Z_{19} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,13}$$

und folgende Nichtvereinfachungen:

$$\text{nicht}(\, Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}\,)$$

$$\text{nicht}(\, Z_{19} \xrightarrow{\exists} J_{3,2}\,).$$

V.2.2.1 Allgemeiner Teil

$Z_{1,0}$: Anstelle der von Arnold [Ar 3] angegebenen Normalform

$$f'_{a_0,a_1}(x,y) = x^3y + y^7 + a_0x^2y^3 + a_1xy^6 \quad (\, a_0, a_1 \in \mathbb{C},\ 4a_0^3 + 27 \neq 0\,)$$

verwenden wir die in dem folgenden Lemma definierte Form f.

Lemma:

$$f_{b_0,b_1}(x,y) := x^3y + xy^5 + b_0x^2y^3 + b_1x^2y^4 \quad (\, b_0, b_1 \in \mathbb{C},\ b_0^2 \neq 4\,)$$

ist eine Normalform von $Z_{1,0}$.

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas in V.2.1 unter Beachtung, daß x^2y^4 unabhängig von b_0 zu einer Basis von $\mathcal{O}(2)\,/\,\Delta(f_{b_0,0})$ gehört. □

$Z_{1,0}$ hat den quasihomogenen Typ (2,1;7); das Poincaré-polynom ist:

$$\chi(t) = t^8 + t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t + 1$$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so gilt:

j	v_j
0	1
1	y
2	$y^2,\ x$
3	$y^3,\ xy$
4	$y^4,\ xy^2,\ x^2$

j	v_j
5	$y^5,\ xy^3,\ x^2y$
6	$y^6,\ xy^4,\ x^2y^2,\ x^3$
7	$y^7,\ xy^5,\ x^2y^3,\ x^3y$
8	$y^8,\ xy^6,\ x^2y^4,\ x^3y^2,\ x^4$

Lemma:

Die folgende Menge repräsentiert eine von b_0 unabhängige Basis von $\mathcal{O}(2)/\Delta f_{b_0,0}$:

$$\{y^k\ (0\leq k\leq 6),\ xy^k\ (0\leq k\leq 6),\ x^2\}$$

Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}:

Für alle Vereinfachungen der Klassen Z_{17}, Z_{18}, Z_{19} verwenden wir die folgenden Normalformen, für

Z_{17}: $f_{1,a_0,a_1}(x,y) := x^3y + y^8 + a_0xy^6 + a_1xy^7$

Z_{18}: $f_{2,a_0,a_1}(x,y) := x^3y + xy^6 + a_0y^9 + a_1y^{10}$

Z_{19}: $f_{3,a_0,a_1}(x,y) := x^3y + y^9 + a_0xy^7 + a_1xy^8 \quad (a_0,a_1\in\mathbb{C})$

Die quasihomogenen Typen sind im Fall

Z_{17}: $(7,3;24)$

Z_{18}: $(5,2;17)$

Z_{19}: $(8,3;27)$

Das Poincarépolynom ist für

Z_{17}: $\chi(t) = t^{28}+t^{25}+t^{22}+t^{21}+t^{19}+t^{18}+t^{16}+t^{15}+t^{14}+t^{13}+t^{12}+t^{10}+t^{9}+t^{7}+t^{6}+t^{3}+1$

Z_{18}: $\chi(t) = t^{20}+t^{18}+t^{16}+t^{15}+t^{14}+t^{13}+t^{12}+t^{11}+2t^{10}+t^{9}+t^{8}+t^{7}+t^{6}+t^{5}+t^{4}+t^{2}+1$

Z_{19}: $\chi(t) = t^{32} + t^{29} + t^{26} + t^{24} + t^{23} + t^{21} + t^{20} + t^{18} + t^{17} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{9} + t^{8} + t^{6} + t^{3} + 1$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so ist für

Z_{17}:

j	V_j
0	1
3	y
6	y^2
7	x
9	y^3
10	xy

j	V_j
12	y^4
13	xy^2
14	x^2
15	y^5
16	xy^3
18	y^6

j	V_j
19	xy^4
21	$y^7,\ x^3$
22	xy^5
25	xy^6
28	$xy^7,\ x^4$

Z_{18}:

j	V_j
0	1
2	y
4	y^2
5	x
6	y^3
7	xy

j	V_j
8	y^4
9	xy^2
10	$y^5,\ x^2$
11	xy^3
12	$y^6,\ x^2y$
13	xy^4

j	V_j
14	$y^7,\ x^2y^2$
15	$xy^5,\ x^3$
16	$y^8,\ x^2y^3$
18	$y^9,\ x^2y^4$
20	$y^{10},\ x^2y^5,\ x^4$

Z_{19}:

j	V_j
0	1
3	y
6	y^2
8	x
9	y^3
11	xy
12	y^4

j	V_j
14	xy^2
15	y^5
16	x^2
17	xy^3
18	y^6
20	xy^4

j	V_j
21	y^7
23	xy^5
24	$y^8,\ x^3$
26	xy^6
29	xy^7
32	$xy^8,\ x^4$

Lemma:

Folgende Mengen $B(f_i)$ bzw. $B'(f_i)$ von Monomen repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}(2)/\Delta f_{i,0,0}$ bzw. $\mathfrak{m}^2(2)/\mathfrak{m}(2)\,\Delta f_{i,0,0}$

(i) Z_{17}: $B(f_1) = \{ y^k\ (0 \le k \le 7),\ xy^k\ (0 \le k \le 7),\ x^2 \}$

$B'(f_1) = \{ y^k\ (2 \le k \le 7),\ xy^k\ (1 \le k \le 7),\ x^2,\ x^3,\ x^2y \}$

(ii) Z_{18}: $B(f_2) = \{ y^k\ (0 \le k \le 10),\ xy^k\ (0 \le k \le 5),\ x^2 \}$

$B'(f_2) = \{ y^k\ (2 \le k \le 10),\ xy^k\ (1 \le k \le 5),\ x^2,\ x^3,\ x^2y \}$

(iii) Z_{19}: $B(f_3) = \{ y^k\ (0 \le k \le 8),\ xy^k\ (0 \le k \le 8),\ x^2 \}$

$B'(f_3) = \{ y^k\ (2 \le k \le 8),\ xy^k\ (1 \le k \le 8),\ x^2,\ x^3,\ x^2y \}$

Die zugehörigen transversalen Scheiben sind minimale gute transversale Scheiben.

In Abschnitt V.2.2.2 betrachten wir die folgende Familie:

$$\mathcal{F}(d) := x^3y + d_{3\,0}\,x^3 + \sum_{2 \le k \le 10} d_{0\,k}\,y^k + \sum_{1 \le k \le 8} d_{1\,k}\,xy^k + \sum_{0 \le k \le 3} d_{2\,k}\,x^2y^k$$

Durch Spezialisierung der in der folgenden Tabelle aufgeführten Koeffizienten $d_{i\,j}$ erhält man aus $\mathcal{F}(d)$ eine transversale bzw. minimale transversale Scheibe $\mathcal{T} : T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(2)$ der quasihomogenen Singularitäten aus Z_{17}, Z_{18} und Z_{19}. Es bezeichne $T = T^+ \oplus T^0 \oplus T^-$ die durch die C^*-Aktion induzierte Zerlegung des Parameterraumes T.

	transversale Scheibe	minimale transv. Scheibe, zusätzl. Bedingungen	Parameter aus T^-
Z_{17}	$d_{0\,9} = d_{0\,10} = 0$ $d_{1\,8} = 0,\ d_{0\,8} = 1$	$d_{2\,2} = d_{2\,3} = 0$	$d_{1\,6}$ $d_{1\,7}$
Z_{18}	$d_{1\,7} = d_{1\,8} = 0$ $d_{1\,6} = 1$	$d_{2\,2} = d_{2\,3} = 0$	$d_{0\,9}$ $d_{0\,10}$
Z_{19}	$d_{0\,10} = 0,\ d_{0\,9} = 1$	$d_{2\,2} = d_{2\,3} = 0$	$d_{1\,7},\ d_{1\,8}$

2.2.2 Untersuchung $Z \longrightarrow E$

2.2.2.1 Aufstellen der Gleichungen

Zunächst stellen wir für die oben definierte Familie $\mathcal{F}(d)$ das Gleichungssystem für die Vereinfachungen in Klassen der $T_{2\,3\,r}$ - Serie $(6 \leq r \leq 13)$ und der $J_{3,i}$ - Serie $(0 \leq i \leq 2)$ auf.

Das strikte Urbild dieser Familie besitzt in (0,0) genau dann den durch die Gleichung

$$d_{3\,0}(x-Ay)^3 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

$d_{2\,0} = d_{1\,1} = d_{0\,2} = 0$ (Diese drei Bedingungen, welche $\mathcal{F}(d) \in m^3(2)$ implizieren, werden nicht numeriert.)

I $\quad d_{2\,1} = -3Ad_{3\,0}$

II $\quad d_{1\,2} = 3A^2 d_{3\,0}$

III $\quad d_{0\,3} = -A^3 d_{3\,0}$

Dabei sei $d_{3\,0} \neq 0$ angenommen. Denn andernfalls muß man, um eine Klasse der E-Gruppierung zu erhalten, $d_{2\,1} = d_{1\,2} = 0$ und $d_{0\,3} \neq 0$ ansetzen und erhält eine E_7 -Singularität. Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Ay$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum_{i,j \geq 0} d_{i\,j}^{(1)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{3\,0}^{(1)} = d_{3\,0}$$

beschrieben. Diese Familie besitzt in (0,0) genau dann den durch die Gleichung

$$d_{3\,0}^{(1)}(x-B_1 y)(x-B_2 y)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

IV $\quad d_{0\,1}^{(1)} = 0$

$$d_{0\,1}^{(1)} = Ad_{1\,3} + d_{0\,4} + A^3 + A^2 d_{2\,2}$$

V $\quad d_{1\,1}^{(1)} = 0$

$$d_{1\,1}^{(1)} = d_{1\,3} + 3A^2 + 2Ad_{2\,2}$$

VI $\quad d_{0\,2}^{(1)} = 0$

$$d_{0\,2}^{(1)} = d_{0\,5} + A^2\, d_{2\,3} + A\, d_{1\,4}$$

VII $\quad d_{2\,1}^{(1)} = -(B_1 + 2B_2)d_{3\,0}$

$$0 = (B_1 + 2B_2)d_{3\,0} + 3A + d_{2\,2}$$

VIII $\quad d_{1\,2}^{(1)} = B_2 d_{3\,0}(2B_1 + B_2)$

$$0 = -B_2 d_{3\,0}(2B_1 + B_2) + 2Ad_{2\,3} + d_{1\,4}$$

IX $\quad d_{0\,3}^{(1)} = -B_1 B_2^2 d_{3\,0}$

$$0 = d_{0\,6} + B_1 B_2^2 d_{3\,0} + Ad_{1\,5}$$

Für Vereinfachungen in die Klassen $T_{2\,3\,r}$ $(r \geq 6)$ muß gelten: $B_1 \neq B_2$, für solche in $J_{3,i}$ $(i \geq 0)$: $B_1 = B_2$ $(=: B)$. Wir substituieren nun $x \longmapsto x + B_2 y$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j \geq 0} d_{i\,j}^{(2)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{2\,0}^{(2)} = d_{3\,0}(B_2 - B_1)$$

Dabei ist $d_{2\,0}^{(2)} \neq 0$ im Fall $T_{2\,3\,r}$. Für Vereinfachungen in die Klasse $T_{2\,3\,7}$ muß gelten: $\quad d_{0\,1}^{(2)} \neq 0$. Für Vereinfachungen in $T_{2\,3\,r}$ $(r>7)$ und in $J_{3,i}$ $(i \geq 0)$ dagegen:

X $\quad d_{0\,1}^{(2)} = 0$

$$0 = B_2^3 + B_2^2 d_{2\,3} + B_2 d_{1\,5} + d_{0\,7} + Ad_{1\,6}$$

Das strikte Urbild der letztgenannten Kurvenfamilie in (0,0) besitzt genau dann den durch die Gleichung

$$d_{2\,0}^{(2)}(x - Cy)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

XI $\quad d^{(2)}_{1\,1} = -2Cd^{(2)}_{2\,0}$

$$0 = 2Cd_{3\,0}(B_2 - B_1) + 3B_2^2 + 2B_2d_{2\,3} + d_{1\,5}$$

XII $\quad d^{(2)}_{0\,2} = C^2d^{(2)}_{2\,0}$

$$0 = -C^2d_{3\,0}(B_2 - B_1) + Ad_{1\,7} + B_2d_{1\,6} + d_{0\,8}$$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir die Klassen $T_{2\,3\,r}$ $(r>8)$. Für $T_{2\,3\,8}$ dürfen die Gleichungen XI und XII nicht zusammen erfüllt sein.

Für die Serie $J_{3,i}$ $(i\geq 0)$ benötigen wir einen anderen Tangentialkegelansatz, den wir später getrennt weiterbehandeln.

Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Cy$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d^{(3)}_{i\,j}\, x^i y^j \quad \text{mit } d^{(3)}_{2\,0} = d^{(2)}_{2\,0} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in die Klasse $T_{2\,3\,9}$ darf $d^{(3)}_{0\,1}$ nicht verschwinden. Dagegen muß in den Fällen $T_{2\,3\,r}$ $(r>9)$ gelten:

XIII $\quad d^{(3)}_{0\,1} = 0$

$$0 = C^3d_{3\,0} + 3B_2C^2 + B_2d_{1\,7} + Ad_{1\,8} + C^2d_{2\,3} + d_{0\,9} + Cd_{1\,6}$$

Das strikte Urbild der Kurvenfamilie besitzt in (O,O) genau dann den durch die Gleichung

$$d^{(3)}_{2\,0}\,(x - Dy)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

XIV $\quad d^{(3)}_{1\,1} = -2Dd^{(3)}_{2\,0}$

$$0 = 2Dd_{3\,0}(B_2 - B_1) + 3C^2d_{3\,0} + 6B_2C + 2Cd_{2\,3} + d_{1\,6}$$

XV $\quad d^{(3)}_{0\,2} = D^2d^{(3)}_{2\,0}$

$$0 = -D^2d_{3\,0}(B_2 - B_1) + C^3 + Cd_{1\,7} + B_2d_{1\,8} + d_{0\,10}$$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir die Klassen $T_{2\,3\,r}$ $(r>10)$. Im Fall $T_{2\,3\,10}$ dürfen XIV und XV nicht zusammen gelten.

Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Dy$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(4)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{2\,0}^{(4)} = d_{2\,0}^{(3)} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in die Klasse $T_{2\,3\,11}$ darf $d_{0\,1}^{(4)}$ nicht verschwinden. Dagegen muß in den Fällen $T_{2\,3\,r}$ $(r>11)$ gelten:

XVI $\quad d_{0\,1}^{(4)} = 0$

$$0 = 3CD^2 d_{3\,0} + 3D(B_2 D + C^2) + Dd_{1\,7} + Cd_{1\,8} + D^2 d_{2\,3}$$

Das strikte Urbild der letztgenannten Familie besitzt in (0,0) genau dann den durch die Gleichung

$$d_{2\,0}^{(4)} (x - Ey)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen gelten:

XVII $\quad d_{1\,1}^{(4)} = -2Ed_{2\,0}^{(4)}$

$$0 = 2Ed_{3\,0}(B_2 - B_1) + 6CDd_{3\,0} + 6B_2 D + 3C^2 + d_{1\,7} + 2Dd_{2\,3}$$

XVIII $\quad d_{0\,2}^{(4)} = E^2 d_{2\,0}^{(4)}$

$$0 = -E^2 d_{3\,0}(B_2 - B_1) + D^3 d_{3\,0} + 3CD^2 + Dd_{1\,8}$$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir Vereinfachungen in die Klassen $T_{2\,3\,r}$ $(r>12)$. Für Vereinfachungen in $T_{2\,3\,12}$ dürfen XVII und XVIII nicht beide gelten. Wir substituieren $x \longmapsto x + Ey$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(5)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{2\,0}^{(5)} = d_{2\,0}^{(4)} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in $T_{2\,3\,13}$ darf $d_{0\,1}^{(5)}$ nicht verschwinden:

XIX $\quad d_{0\,1}^{(5)} \neq 0$

$$0 \neq 3Ed_{3\,0}(D^2 + CE) + 3B_2 E^2 + D^3 + 6CDE + Ed_{1\,8} + E^2 d_{2\,3}$$

Wir setzen nun die Aufstellung des Gleichungssystems für Vereinfachungen in die $J_{3,i}$ - Serie fort.
Das strikte Urbild der Kurvenfamilie

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(2)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{3\,0}^{(2)} = d_{3\,0}^{(1)} \neq 0$$

besitzt in (0,0) genau dann den durch die Gleichung

$$d_{3\,0}^{(2)} (x - C_1 y)(x - C_2 y)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

X' $\quad d_{0\,1}^{(2)} = 0$

$\quad 0 = B^3 + B^2 d_{2\,3} + Bd_{1\,5} + d_{0\,7} + Ad_{1\,6}$

XI' $\quad d_{1\,1}^{(2)} = 0$

$\quad 0 = 3B^2 + 2Bd_{2\,3} + d_{1\,5}$

XII' $\quad d_{0\,2}^{(2)} = 0$

$\quad 0 = Bd_{1\,6} + Ad_{1\,7} + d_{0\,8}$

XIII' $\quad d_{2\,1}^{(2)} = -(2C_2 + C_1)d_{3\,0}^{(2)}$

$\quad 0 = (2C_2 + C_1)d_{3\,0} + 3B + d_{2\,3}$

XIV' $\quad d_{1\,2}^{(2)} = C_2 d_{3\,0}^{(2)} (C_2 + 2C_1)$

$\quad 0 = -C_2 d_{3\,0}(C_2 + 2C_1) + d_{1\,6}$

XV' $\quad d_{0\,3}^{(2)} = -C_1 C_2^2 d_{3\,0}^{(2)}$

$\quad 0 = C_1 C_2^2 d_{3\,0} + Bd_{1\,7} + Ad_{1\,8} + d_{0\,9}$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir die Klassen $J_{3,i}$ (i>0). Im Fall $J_{3,0}$ dürfen XIII', XIV' und XV' nicht alle zusammen erfüllt sein.
Wir substituieren nun $x \longmapsto x + C_2 y$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(3)} x^i y^j$$

Für Vereinfachungen in $J_{3,1}$ darf $d_{0\,1}^{(3)}$ nicht verschwinden.

Dagegen muß bei Vereinfachungen in $J_{3,i}$ (i>1) gelten:

XVI' $d^{(3)}_{0\,1} = 0$

$$0 = C_2^3 + C_2 d_{1\,7} + B d_{1\,8} + d_{0\,10}$$

Damit sind alle in Kapitel V.2.2 benötigten Gleichungssysteme aufgestellt.

V.2.2.2.2 Analyse der Gleichungen

$\underline{Z_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}}$ und $\underline{\text{nicht}(Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12})}$

Es liegt genau dann eine $T_{2\,3\,r}$-Singularität mit $r \geq 11$ vor, wenn eine Lösung der Gleichungen

$$d_{2\,0} = 0,\ d_{1\,1} = 0,\ d_{0\,2} = 0$$

und der Gleichungen I bis XV des Gleichungssystems aus V.2.2.2.1 existiert, die den Nebenbegingungen $d_{3\,0} \neq 0$, $B_1 \neq B_2$ genügt. Ist die Gleichung XVI nicht erfüllt, so liegt eine $T_{2\,3\,11}$-Singularität vor.
Wir untersuchen jetzt die Lösungen mit $d_{1\,6} = 0$ und $d_{1\,7} = 0$. Die Gleichungen I bis XI lassen sich einfach auflösen, wenn folgende Gleichungen gelöst sind:

XV $\quad 0 = -D^2 d_{3\,0}(B_2 - B_1) + C^3$

XIV $\quad 0 = 2\,D d_{3\,0}(B_2 - B_1) + 3\,C^2 d_{3\,0} + 6\,B_2 C + 2\,C d_{2\,3}$

XIII $\quad 0 = C^3 d_{3\,0} + 3\,B_2 C^2 + C^2 d_{2\,3}$

XII $\quad 0 = -C^2 d_{3\,0}(B_2 - B_1) + 1$

Die Lösung dieser vier Gleichungen erhält man folgendermaßen: Aus XII folgt $C \neq 0$ und aus XV folgt $D \neq 0$.
Damit erhält man:

$$C = -\frac{1}{2} d_{3\,0} D$$

$$B_2 = \frac{1}{6} d_{3\,0}^2 D - \frac{1}{3} d_{2\,3}$$

$$B_1 = \frac{7}{24} d_{3\,0}^2 D - \frac{1}{3} d_{2\,3}$$

$$D^3 = -\left(\frac{2}{d_{3\,0}}\right)^5$$

Eine einparametrige eindeutige Lösung des gesamten Gleichungssystems (mit $d_{1\,6} = 0$, $d_{1\,7} = 0$), die den Nebenbedingungen genügt, erhält man durch die Wahlen:

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B_2 = 0.$$

Sie ist von der Gestalt ($t \in \mathbb{C}^*$):

$$\begin{array}{llllll} & d_{3\,0} = 2t^3, & d_{1\,5} = -2t^2, & d_{2\,2} = t^4, & d_{2\,3} = 2t, & \\ (*) & A = 0, & B_1 = -\frac{1}{2}t, & B_2 = 0, & C = \frac{1}{t^2}, & D = -\frac{1}{t^5} \end{array}$$

(alle anderen $d_{i\,k}$ sind Null).

Für diese Lösung ist Gleichung XVI verletzt; es liegt also eine $T_{2\,3\,11}$ - Singularität vor.
Wir erhalten die Familie

$$x^3y + 2tx^2(t^2x - y^3) + (t^2x - y^3)^2y^2$$

Also gilt: $Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,11}$.

Wir zeigen nun mit Hilfe der Sätze 5 und 6 aus IV.2.2:

$\underline{Z_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}}$.

In der vorliegenden Situation wählen wir dabei T, s, V_1, ℓ, V_2 aus diesen Sätzen wie folgt:

$T := \{(d_{0\,2},\dots,d_{0\,7},d_{1\,1},\dots,d_{1\,7},d_{2\,0},\dots,d_{2\,3},d_{3\,0}) \in \mathbb{C}^{18}\}$
($d_{1\,6}$ und $d_{1\,7}$ sind die Koordinaten von T^-);

$s := 5$ (Dabei bezeichnen wir die Koordinaten von $\mathbb{C}^s$ mit A, B_1, B_2, C, D);

$V_1 := \{x \in T \times \mathbb{C}^5 \mid d_{0\,2} = 0,\ d_{1\,1} = 0,\ d_{2\,0} = 0$, Gleichungen I bis XV, $A = 0$, $B_2 = 0\}$; also:

$\ell = 20$;

$V_2 := \{x \in T \times \mathbb{C}^5 \mid B_1 = B_2,\ d_{3\,0} = 0$, Gleichung XVI$\}$.

Nach den vorangehenden Überlegungen existiert eine Lösung p in $V_1 \setminus V_2$, für die die Voraussetzungen (i), (ii) und (iii)

von Satz 6, IV.2.2, erfüllt sind.
Dabei erhält man $p \in T \times C^s$, wenn man in (*) $t=1$ setzt.
Da der Lösungsraum des obigen Gleichungssystems eindimensional ist, gilt:

$$\dim(V_1 \cap \pi^{-1}(T^+), p) = 1.$$

Ferner gilt:

$$\dim T \times C^s - (\ell + \dim T^o + \dim T^-) = 23 - (20 + 0 + 2) = 1.$$

Daher sind alle Voraussetzungen des Satzes 6 aus IV.2.2 erfüllt und mit Satz 5 desselben Abschnitts erhalten wir das Resultat:

$$Z_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}.$$

<u>Bemerkung:</u> In diesem Beweis haben wir beispielhaft die Anwendung der Sätze 5 und 6 aus IV.2.2 vorgeführt. In den nachfolgenden Untersuchungen verzichten wir auf eine ausführliche Darlegung.

Wir zeigen nun: <u>nicht($Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$)</u>

Hinreichend für eine Vereinfachung $Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$ ist die Existenz einer Lösung der Gleichungen I bis XVI des Gleichungssystems aus V.2.2.2.1 . Da bereits oben eine Lösung der ersten 15 Gleichungen gefunden wurde, brauchen wir nur noch

XVI $\quad 0 = 3D(d_{3\,0}CD + B_2D + C^2)$

zu untersuchen. Wir betrachten dazu eine minimale transversale Scheibe, d.h. wir setzen $d_{2\,2} = 0$ und $d_{2\,3} = 0$.

Fall 1: $D = 0$ Mit XV und XII erhält man dann einen Widerspruch.

Fall 2: $D \neq 0$ und $B_2 = -\frac{C^2}{D} - d_{3\,0}C$

Aus XV folgt: $B_1 = -\frac{C^2}{D} - d_{3\,0}C - \frac{C^3}{D^2 d_{3\,0}}$

Aus XIV folgt: $0 = C^2(4\frac{C}{D} + 3d_{3\,0})$ und schließlich

mit XIII: $\quad 0 = C^3(3\frac{C}{D} + 2d_{3\,0})$.

Da nach XII $C \neq 0$ ist, können die letzten beiden Gleichungen nicht beide gelten.

Nach Satz 3 aus IV.2.2 existiert dann auch keine Vereinfachung für beliebige $d_{1\,6}$ und $d_{1\,7}$.

$Z_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}$:

Aufgrund der Nichteinbettbarkeit des Milnorgitters von $T_{2\,3\,13}$ in das von Z_{18} gilt: nicht($Z_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,13}$). Daher gilt $Z_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$ genau dann, wenn eine Lösung der Gleichungen I bis XVI des Gleichungssystems aus V.2.2.2.1 existiert. Die Gleichungen I bis XII lassen sich einfach auflösen, wenn folgende vier Gleichungen gelöst sind:

XVI	$0 = D(3C(Dd_{3\,0} + C) + 3B_2D + Dd_{2\,3})$
XV	$0 = -D^2d_{3\,0}(B_2 - B_1) + C^3 + d_{0\,10}$
XIV	$0 = 2D(B_2 - B_1)d_{3\,0} + 3C^2d_{3\,0} + 6B_2C + 2Cd_{2\,3} + 1$
XIII	$0 = C^3d_{3\,0} + 3B_2C^2 + C^2d_{2\,3} + d_{0\,9} + C$

Außerdem müssen die Nebenbedingungen $d_{3\,0} \neq 0$ und $B_2 \neq B_1$ erfüllt sein. Für $d_{0\,9} = 0$ und $d_{0\,10} = 0$ erhalten wir folgende Lösung dieser Gleichungen:

$$B_1 = -\frac{1}{3}d_{2\,3} + \frac{1}{C}, \quad B_2 = -\frac{1}{3}d_{2\,3}, \quad D = C^3, \quad d_{3\,0} = -C^{-2}$$

(Wegen der Gleichungen XV und XIV sind C und D von Null verschieden.)

Eine einparametrige Lösung erhält man durch die Wahlen:

$$A = 0 \text{ und } B_2 = 0.$$

Mit $t := \frac{1}{C} \in \mathbb{C}^*$ erhält man dann folgende Vereinfachung:

$$x^3y + xy^6 - t^2x^3 + ty^2(tx - y^3)^2$$

Mit den Sätzen 5 und 6 aus IV.2.2 erhalten wir das Resultat: Es existiert eine Vereinfachung $Z_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}$.

$Z_{19} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,13}$:

Da nach den Resultaten von V.1.2 gilt: nicht($Z_{19} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,14}$), existiert eine Vereinfachung $Z_{19} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,13}$ genau dann, wenn eine Lösung der Gleichungen I bis XVIII des Gleichungs-

systems aus V.2.2.2.1 existiert.
Die Gleichungen I bis XII lassen sich einfach auflösen, wenn folgende sechs Gleichungen gelöst sind:

$$
\begin{array}{ll}
\text{XVIII} & 0 = -E^2 d_{30}(B_2 - B_1) + D^3 d_{30} + 3CD^2 + Dd_{18} \\
\text{XVII} & 0 = 2Ed_{30}(B_2 - B_1) + 6CDd_{30} + 6B_2D + 3C^2 + d_{17} + 2Dd_{23} \\
\text{XVI} & 0 = 3CD^2 d_{30} + 3D(B_2D + C^2) + Dd_{17} + Cd_{18} + D^2 d_{23} \\
\text{XV} & 0 = -D^2 d_{30}(B_2 - B_1) + C^3 + Cd_{17} + B_2 d_{18} \\
\text{XIV} & 0 = 2Dd_{30}(B_2 - B_1) + 3C^2 d_{30} + 6B_2C + 2Cd_{23} + d_{16} \\
\text{XIII} & 0 = C^3 d_{30} + 3B_2C^2 + B_2 d_{17} + Ad_{18} + C^2 d_{23} + Cd_{16} + 1
\end{array}
$$

Weiterhin müssen die Nebenbedingungen $d_{30} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$ erfüllt sein.
Für $d_{17} = 0$ und $d_{18} = 0$ erhalten wir die folgende Lösung dieser sechs Gleichungen:
Wegen XIII ist $C \neq 0$ und wegen XV ist $D \neq 0$. Aus XIV, XV und XVI gewinnen wir d_{16}, $B_2 - B_1$ und d_{23}. Diese Ausdrücke substituieren wir in XIII, XVII, XVIII und erhalten:

$$
\begin{array}{ll}
\text{XIII} & 0 = C^3 d_{30} + \frac{1}{D} C^4 + 1 \\
\text{XVII} & 0 = 2C^3 D^{-2} E - 3C^2 \\
\text{XVIII} & 0 = -C^3 D^{-2} E^2 + D^3 d_{30} + 3CD^2
\end{array}
$$

Daraus erhält man die Beziehungen:

$$B_2 - B_1 = -2^6 3^{-3} Dd_{30}^2, \qquad C = -\frac{4}{3} Dd_{30}, \qquad E = -\frac{9}{8} Dd_{30}^{-1},$$

$$d_{23} = -3B_2 - \frac{4}{3} Dd_{30}^2, \qquad (*)\ (2^2 D)^3 = -\left(\frac{3}{d_{30}}\right)^4$$

Durch die Wahlen $A = 0$ und $B_2 = 0$ erhält man mit $d_{30} =: 3t^3$ aus (*):

$$D = -\frac{\varepsilon}{4t^4} \quad (\varepsilon^3 = 1)$$

und folgende Vereinfachungsfamilie ($\varepsilon := 1$):

$$x^3 y + 4tx(t^2x^2 - y^6) + (y^3 - tx)^3 + 16t^3 y^2 (y^3 - tx)^2 .$$

Mit den Sätzen 5 und 6 aus IV.2.2 erhalten wir das Resultat:
Es existiert eine Vereinfachung $Z_{19} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,13}$.

nicht($Z_{19} \xrightarrow{\exists} J_{3,2}$):

Hinreichend für eine Vereinfachung $Z_{19} \xrightarrow{\exists} J_{3,2}$ ist die Existenz einer Lösung der Gleichungen I bis IX und X' bis XVI' aus V.2.2.2.1 . Wir betrachten die für diese Analyse wichtigen Gleichungen XV' und XVI' für die minimale transversale Scheibe von $Z_{1\,9}$ (d.h.: $d_{2\,2} = 0$ und $d_{2\,3} = 0$):

XVI' $\quad 0 = C_2^3 + C_2 d_{1\,7} + B d_{1\,8}$

XV' $\quad 0 = C_1 C_2^2 d_{3\,0} + B d_{1\,7} + A d_{1\,8} + 1$

Wir setzen $d_{1\,7} = 0$ und $d_{1\,8} = 0$. Dann folgt aus XVI': $C_2 = 0$, was aber in XV' zum Widerspruch führt. Nach Satz 3 aus IV.2.2 existiert dann auch für beliebige $d_{1\,7}$ und $d_{1\,8}$ keine Lösung des Gleichungssystems.

V.2.3 Untersuchung der Klassen $Q_{2,0}$, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}

Zum Beweis der Theoreme 1 und 2 im Kapitel III ist für diese vier Klassen noch folgendes zu beweisen:

$Q_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$ und

nicht($Q_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$)

V.2.3.1 Allgemeiner Teil

$Q_{2,0}$: Wir verwenden die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform

$$f_{a_0,a_1}(x,y,z) = x^3 + yz^2 + xy^4 + a_0x^2y^2 + a_1x^2y^3$$
$$(a_0,a_1 \in \mathbb{C},\ a_0^2 \neq 4)$$

Der quasihomogene Typ dieser Singularität ist (4,2,5;12).
Das Poincarépolynom von $Q_{2,0}$ ist:

$$\chi(t) = t^{14} + t^{12} + 2t^{10} + t^9 + 2t^8 + 2t^6 + t^5 + 2t^4 + t^2 + 1$$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so gilt:

j	V_j
0	1
2	y
4	$x,\ y^2$
5	z
6	$xy,\ y^3$

j	V_j
8	$xy^2,\ y^4,\ x^2$
9	$xz,\ y^2z$
10	$xy^3,\ y^5,\ z^2,\ x^2y$
12	$x^2y^2,\ x^3,\ yz^2,\ xy^4,\ y^6$
14	$x^2y^3,\ xz^2,\ y^2z^2,\ x^3y,\ xy^5,\ y^7$

Lemma:

Eine von a_0 unabhängige Basis von $\mathcal{O}(3)/\Delta f_{a_0,0}$ ist $\{ y^k\ (0 \leq k \leq 5),\ xy^k\ (0 \leq k \leq 3),\ z,\ xz,\ x^2y^2,\ x^2y^3 \}$.

Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}:

Für alle Familien von Vereinfachungen in A.5 und für alle Beweise in V.2.3.2 verwenden wir folgende Normalformen; für

$$Q_{16}: \quad f_{1,a_0,a_1}(x,y,z) := x^3 + yz^2 + y^7 + a_0xy^5 + a_1xy^6$$

$$Q_{17}: \quad f_{2,a_0,a_1}(x,y,z) := x^3 + yz^2 + xy^5 + a_0y^8 + a_1y^9$$

$$Q_{18}: \quad f_{3,a_0,a_1}(x,y,z) := x^3 + yz^2 + y^8 + a_0xy^6 + a_1xy^7 \quad (a_0,a_1 \in \mathbb{C})$$

Die quasihomogenen Typen sind im Fall

Q_{16}: (7,3,9;21)

Q_{17}: (10,4,13;30)

Q_{18}: (16,6,21;48)

Das Poincarépolynom ist für

$$Q_{16}: \quad \chi(t) = t^{25} + t^{22} + t^{19} + t^{18} + 2t^{16} + t^{15} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + 2t^9 + t^7 + t^6 + t^3 + 1$$

$$Q_{17}: \quad \chi(t) = t^{36} + t^{32} + t^{28} + t^{26} + t^{24} + t^{23} + t^{22} + t^{20} + t^{18} + t^{16} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^8 + t^4 + 1$$

$$Q_{18}: \quad \chi(t) = t^{58} + t^{52} + t^{46} + t^{42} + t^{40} + t^{37} + t^{36} + t^{34} + t^{30} + t^{28} + t^{24} + t^{22} + t^{21} + t^{18} + t^{16} + t^{12} + t^6 + 1$$

Bezeichnet V_j die Menge der Monome mit quasihomogenem Grad j, so ist für

Q_{16}:

j	V_j
0	1
3	y
6	y^2
7	x
9	y^3, z

j	V_j
10	xy
12	y^4, yz
13	xy^2
15	y^5, y^2z
16	xy^3, xz

j	V_j
18	y^6, z^2, y^3z
19	xy^4, xyz
22	xy^5, xy^2z
25	xy^6, xz^2

Q_{17}:

j	v_j	j	v_j	j	v_j
0	1	14	xy	24	y^6
4	y	16	y^4	26	xy^4, z^2
8	y^2	18	xy^2	28	y^7
10	x	20	y^5, x^2	32	y^8
12	y^3	22	xy^3	36	y^9, xz^2
13	z	23	xz		

Q_{18}:

j	v_j	j	v_j	j	v_j
0	1	22	xy	37	xz
6	y	24	y^4	40	xy^4
12	y^2	28	xy^2	42	y^7, z^2
16	x	30	y^5	46	xy^5
18	y^3	34	xy^3	52	xy^6
21	z	36	y^6	58	xy^7

<u>Lemma:</u>

Folgende Mengen $B(f_i)$ bzw. $B'(f_i)$ von Monomen repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}(3)/\Delta f_{i,0,0}$ bzw. $\mathfrak{m}^2(3)/\mathfrak{m}(3)\Delta f_{i,0,0}$

(i) Q_{16}: $B(f_1) = \{y^k \ (0 \le k \le 6),\ xy^k \ (0 \le k \le 6),\ z,\ xz\}$

$B'(f_1) = \{y^k \ (2 \le k \le 6),\ xy^k \ (1 \le k \le 6),\ xz,\ x^2,\ z^2,\ yz\}$

(ii) Q_{17}: $B(f_2) = \{y^k \ (0 \le k \le 9),\ xy^k \ (0 \le k \le 4),\ z,\ xz\}$

$B'(f_2) = \{y^k \ (2 \le k \le 9),\ xy^k \ (1 \le k \le 4),\ xz,\ x^2,\ z^2,\ yz\}$

(iii) Q_{18}: $B(f_3) = \{y^k \ (0 \le k \le 7),\ xy^k \ (0 \le k \le 7),\ z,\ xz\}$

$B'(f_3) = \{y^k \ (2 \le k \le 7),\ xy^k \ (1 \le k \le 7),\ xz,\ x^2,\ z^2,\ yz\}$

Die zugehörigen transversalen Scheiben sind minimale gute transversale Scheiben.

In Abschnitt V.2.3.2 betrachten wir folgende Familie:

$$\mathcal{F}(t) := x^3 + yz^2 + t_{101}xz + t_{002}z^2 + t_{111}xyz + \sum_{2\leq k\leq 9} t_{0k0}\,y^k$$
$$+ \sum_{1\leq k\leq 7} t_{1k0}\,xy^k + \sum_{0\leq k\leq 3} t_{2k0}\,x^2y^k + \sum_{1\leq k\leq 4} t_{0k1}\,y^k z$$

Durch Spezialisierung der in der folgenden Tabelle aufgeführten Koeffizienten t_{ijk} erhält man aus $\mathcal{F}(t)$ eine transversale bzw. minimale transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$ für die quasihomogenen Singularitäten aus Q_{16}, Q_{17} und Q_{18}. Es bezeichne $T = T^+ \oplus T^0 \oplus T^-$ die durch die $\mathbb{C}^*$-Aktion induzierte Zerlegung des Parameterraumes.

	transversale Scheibe	minimale transv. Scheibe, zusätzl. Bedingungen	Parameter aus T^-
Q_{16}	$t_{080} = t_{090} = 0$ $t_{170} = t_{230} = 0$ $t_{041} = 0$ $t_{070} = 1$	$t_{210} = t_{220} = 0$ $t_{021} = t_{031} = 0$ $t_{111} = 0$	t_{150} t_{160}
Q_{17}	$t_{160} = t_{170} = 0$ $t_{230} = 0$ $t_{150} = 1$	$t_{210} = t_{220} = 0$ $t_{021} = t_{031} = 0$ $t_{041} = t_{111} = 0$	t_{080} t_{090}
Q_{18}	$t_{090} = t_{230} = 0$ $t_{080} = 1$	$t_{210} = t_{220} = 0$ $t_{021} = t_{031} = 0$ $t_{041} = t_{111} = 0$	t_{160} t_{170}

<u>Lemma:</u>

In allen Beweisen von Vereinfachungen der Q-Gruppierung in alle uni- und bimodularen exzeptionellen E-Klassen, sowie in alle Klassen der Serien $J_{3,i}$ $(i\geq 0)$ und T_{23r} $(r\geq 6)$ kann man o.E. $t_{002} \neq 0$ annehmen.

Beweis: Sei $t_{002}=0$. Dann ist der 4-Jet aller minimalen transversalen Scheiben der Klassen $Q_{2,0}$, Q_{16}, Q_{17} und Q_{18} von der Form:

$$h(x,y,z):=yz^2+\sum_{i+j+k=2} t_{ijk}x^iy^jz^k+\sum_{3\leq i+j\leq 4} t_{ij0}x^iy^j$$

mit $t_{002}=t_{310}=t_{400}=0$ und $t_{300}=1$.
Der 4-Jet der hier betrachteten Normalformen der Klassen T_{23r} $(r\geq 6)$ ist bezüglich geeigneter Koordinaten:

$$f_\lambda(x,y,z):=x^3+z^2+\lambda xyz \qquad (\lambda\neq 0)$$

Der 4-Jet der Normalformen der exzeptionellen uni- und bimodularen E-Klassen, sowie der Serie $J_{3,i}$ $(i\geq 0)$ ist:

$$f_0(x,y,z):=x^3+z^2.$$

Existiert nun eine Vereinfachung einer der genannten Q-Klassen in eine dieser Singularitäten der E-Gruppierung, so gibt es eine Koordinatentransformation Φ mit der Eigenschaft: $h\equiv f_\lambda\circ\Phi \bmod \mathfrak{m}^5(3)$, wobei

$$\Phi(x,y,z):=\Big(\sum_{i,j,k} a_{ijk}x^iy^jz^k,\ \sum_{i,j,k} b_{ijk}x^iy^jz^k,\ \sum_{i,j,k} c_{ijk}x^iy^jz^k\Big)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der Monome z^2, z^3, z^4 und yz^2 in dieser Reihenfolge ergibt:

a) $c_{001}^2=0$

b) $\lambda a_{001}b_{001}c_{001}+a_{001}^3+2c_{001}c_{002}=0$

c) $\lambda(a_{001}b_{001}c_{002}+a_{001}b_{002}c_{001}+a_{002}b_{001}c_{001})+$
$3a_{001}^2a_{002}+c_{002}^2+2c_{001}c_{003}=0$

d) $\lambda(a_{001}b_{001}c_{010}+a_{001}b_{010}c_{001}+a_{010}b_{001}c_{001})+$
$3a_{001}^2a_{010}+2c_{010}c_{002}+2c_{001}c_{011}=1$

Aus a) folgt: $c_{001}=0$. Damit erhält man aus b): $a_{001}=0$ und aus c): $c_{002}=0$ und schließlich in d) einen Widerspruch. □

Da wir nach dem letzten Lemma für die Untersuchung der Vereinfachungen $Q \longrightarrow E$ o.E. $t_{002} \neq 0$ annehmen können, gilt:

$$\mathcal{F}(t) \sim_K z^2 + \Delta_z(\mathcal{F}(t)) \quad \text{(vgl. IV.3.2)}$$

Wir beschränken uns deshalb bei den Untersuchungen in V.2.3.2 auf die Kurvenfamilie

$$\mathcal{K}(d) := \sum_{i,j \geq 0} d_{ij} x^i y^j := \Delta_z(\mathcal{F}(t)).$$

Dabei gilt für die nichtverschwindenden Koeffizienten d_{ij}:

$$
\begin{aligned}
d_{02} &= 4t_{020}t_{002} - t_{011}^2 \\
d_{03} &= 4t_{030}t_{002} - 2t_{011}t_{021} + 4t_{020} \\
d_{04} &= 4t_{040}t_{002} - 2t_{011}t_{031} - t_{021}^2 + 4t_{030} \\
d_{05} &= 4t_{050}t_{002} - 2t_{011}t_{041} - 2t_{021}t_{031} + t_{040} \\
d_{06} &= 4t_{060}t_{002} - 2t_{021}t_{041} - t_{031}^2 + 4t_{050} \\
d_{07} &= 4t_{070}t_{002} - 2t_{031}t_{041} + 4t_{060} \\
d_{08} &= 4t_{080}t_{002} - t_{041}^2 + 4t_{070} \\
d_{09} &= 4t_{090}t_{002} + 4t_{080} \\
d_{0\,10} &= 4t_{090} \\
d_{11} &= 4t_{110}t_{002} - 2t_{101}t_{011} \\
d_{12} &= 4t_{120}t_{002} - 2t_{101}t_{021} - 2t_{111}t_{011} + 4t_{110} \\
d_{13} &= 4t_{130}t_{002} - 2t_{101}t_{031} - 2t_{111}t_{021} + 4t_{120} \\
d_{14} &= 4t_{140}t_{002} - 2t_{101}t_{041} - 2t_{111}t_{031} + 4t_{130} \\
d_{15} &= 4t_{150}t_{002} - 2t_{111}t_{041} + 4t_{140} \\
d_{16} &= 4t_{160}t_{002} + 4t_{150} \\
d_{17} &= 4t_{170}t_{002} + 4t_{160} \\
d_{18} &= 4t_{170} \\
d_{20} &= 4t_{200}t_{002} - t_{101}^2 \\
d_{21} &= 4t_{210}t_{002} + 4t_{200} - 2t_{111}t_{101} \\
d_{22} &= 4t_{220}t_{002} + 4t_{210} - t_{111}^2 \\
d_{23} &= 4t_{230}t_{002} + 4t_{220} \\
d_{24} &= 4t_{230} \\
d_{30} &= 4t_{002} \\
d_{31} &= 4
\end{aligned}
$$

V.2.3.2 Untersuchung $Q \longrightarrow E$

V.2.3.2.1 Aufstellen der Gleichungen

Zunächst stellen wir für die oben definierte Familie $\mathcal{K}(d)$ das Gleichungssystem für Vereinfachungen in die Klassen der $T_{2\,3\,r}$-Serie ($6 \leq r \leq 11$) auf.

In den Gleichungen I bis XVI werden zunächst die Bedingungen an die $d_{i\,j}^{(k)}$ ($k \geq 0$) aufgeführt, die aus der Betrachtung des Multiplizitätenbaumes hergeleitet werden. Die $d_{i\,j}^{(k)}$ stehen abkürzend für Ausdrücke in den $d_{i\,j} := d_{i\,j}^{(0)}$ bzw. in den $t_{i\,j\,k}$ und werden in der an zweiter Stelle aufgeführten Gleichung definiert. Die dritte Gleichung entsteht schließlich durch Identifikation der ersten beiden Gleichungen, durch Einsetzen bereits gewonnener Beziehungen und durch Zusammenfassung von Termen in einer Weise, wie es jeweils günstig erscheint. Diese zuletzt genannten Gleichungen werden bei der in V.2.3.2.2 erfolgenden Lösung von Teilsystemen dieses Gleichungssystems durch die römischen Ziffern angesprochen und verwendet.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$a^2 := t_{2\,0\,0}, \quad b^2 := t_{0\,2\,0}, \quad c^2 := t_{0\,0\,2} \neq 0$$

$$X_i := \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \, c^{2k-3} \, t_{0\,k\,1} \quad (i \geq 1)$$

$$Y := 2a - c\,t_{1\,1\,1}$$

$$Z_1 := -A, \quad Z_2 := Z_1 + c^2 B_2, \quad Z_3 := Z_2 - c^4 C$$

Das strikte Urbild der Familie $\mathcal{K}(d)$ besitzt in $(0,0)$ genau dann den durch die Gleichung

$$d_{3\,0}(x - A\,y)^3 = 0 \quad (d_{3\,0} = 4\,t_{0\,0\,2} \neq 0)$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$d_{20} = 0 \iff t_{101}^2 = 4a^2c^2$

$d_{11} = 0 \iff t_{110}^2 = 4a^2b^2$

$d_{02} = 0 \iff t_{011}^2 = 4b^2c^2$

I $\quad d_{21} = -3Ad_{30}$

$$d_{21} = -4t_{111}ac + 4a^2 + 4c^2t_{210}$$

$$t_{210} = -\frac{a^2}{c^2} + \frac{a}{c}t_{111} - 3A$$

II $\quad d_{12} = 3A^2d_{30}$

$$d_{12} = -4bct_{111} - 4act_{021} + 8ab + 4c^2t_{120}$$

$$t_{120} = -\frac{b}{c^2}Y + \frac{a}{c}t_{021} + 3A^2$$

III $\quad d_{03} = -A^3d_{30}$

$$d_{03} = -4bct_{021} + 4c^2t_{030} + 4b^2$$

$$t_{030} = -\frac{b^2}{c^2} + \frac{b}{c}t_{021} - A^3$$

Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Ay$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{ij}^{(1)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{30}^{(1)} = d_{30}$$

beschrieben. Diese Familie besitzt in (0,0) genau dann den durch die Gleichung

$$d_{30}^{(1)}(x - B_1y)(x - B_2y)^2 = 0, \quad (B_1 \neq B_2)$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

IV $\quad d_{01}^{(1)} = 0$

$$d_{01}^{(1)} = -4bct_{031} - t_{021}^2 + 4t_{030} + 4c^2t_{040} + 4A^3 - A^2(t_{111}^2 - 4t_{210} - 4c^2t_{220}) - A(2t_{111}t_{021} + 4act_{031} - 4t_{120} - 4c^2t_{130})$$

$$t_{040} + A t_{130} + A^2 t_{220} = \frac{1}{4c^4}(X_2 - AY)^2 + \frac{1}{c} t_{031}(b + aA)$$

V $\quad d_{11}^{(1)} = 0$

$$d_{11}^{(1)} = -2t_{111}t_{021} - 4act_{031} + 4t_{120} + 4c^2 t_{130} + 12A^2 - 2A(t_{111}^2 - 4t_{210} - 4c^2 t_{220})$$

$$t_{130} + 2At_{220} = -\frac{1}{2c^4}(X_2 - AY)Y + \frac{a}{c} t_{031}$$

VI $\quad d_{02}^{(1)} = 0$

$$d_{02}^{(1)} = -4bct_{041} - 2t_{021}t_{031} + 4t_{040} + 4A^2(c^2 t_{230} + t_{220}) + 2A(2c^2 t_{140} - t_{111}t_{031} - 2act_{041} + 2t_{130}) + 4c^2 t_{050}$$

$$t_{050} + At_{140} + A^2 t_{230} = -\frac{1}{4c^6}(X_3 - AY)^2 + \frac{1}{4} t_{031}^2 + \frac{1}{c}(b + aA)t_{041}$$

VII $\quad d_{21}^{(1)} = -(B_1 + 2B_2)\, d_{30}^{(1)}$

$$d_{21}^{(1)} = -t_{111}^2 + 4t_{210} + 4c^2 t_{220} + 12A$$

$$t_{220} = \frac{1}{4c^4} Y^2 - (B_1 + 2B_2)$$

VIII $\quad d_{12}^{(1)} = (2B_1 + B_2)B_2\, d_{30}^{(1)}$

$$d_{12}^{(1)} = 4c^2 t_{140} - 2t_{111}t_{031} - 4act_{041} + 4t_{130} + 8A(c^2 t_{230} + t_{220})$$

$$t_{140} + 2At_{230} = \frac{1}{2c^6}(X_3 - AY)Y + \frac{a}{c} t_{041} + (2B_1 + B_2)B_2$$

IX $\quad d_{03}^{(1)} = -B_1 B_2^2\, d_{30}^{(1)}$

$$d_{03}^{(1)} = 4A^2 t_{230} - 2t_{021}t_{041} - t_{031}^2 + 4t_{050} + 4c^2 t_{060} + 2A(2t_{140} + 2c^2 t_{150} - t_{111}t_{041})$$

$$t_{060} + At_{150} = \frac{1}{4c^8}(X_3 - AY)^2 + \frac{1}{2c^3} t_{041}(X_2 - AY) - B_1 B_2^2$$

Wir substituieren $x \longmapsto x + B_2 y$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(2)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{2\,0}^{(2)} = (B_2 - B_1)\, d_{3\,0}^{(1)} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in die Klasse $T_{2\,3\,7}$ muß gelten: $d_{0\,1}^{(2)} \neq 0$. In allen anderen Fällen:

X $\quad d_{0\,1}^{(2)} = 0$

$$d_{0\,1}^{(2)} = -2\,t_{0\,3\,1}\,t_{0\,4\,1} + 4\,t_{0\,6\,0} + 4\,c^2\,t_{0\,7\,0} + 4\,B_2^2\,(B_2 + c^2\,t_{2\,3\,0} + t_{2\,2\,0}) + 2\,B_2\,(4\,A\,t_{2\,3\,0} + 2\,t_{1\,4\,0} + 2\,c^2\,t_{1\,5\,0} - t_{1\,1\,1}\,t_{0\,4\,1}) + 4\,A\,(t_{1\,5\,0} + c^2\,t_{1\,6\,0})$$

$$t_{0\,7\,0} + A\,t_{1\,6\,0} + B_2\,t_{1\,5\,0} + B_2^2\,t_{2\,3\,0} = -\frac{1}{4c^{10}}\,(X_3 + Z_2\,Y)^2 - \frac{1}{2c^5}\,t_{0\,4\,1}\,(X_3 + Z_2\,Y)$$

Das strikte Urbild der letztgenannten Kurvenfamilie in (0,0) besitzt genau dann den durch die Gleichung

$$d_{2\,0}^{(2)}\,(x - c\,y)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

XI $\quad d_{1\,1}^{(2)} = -2\,c\,d_{2\,0}^{(2)}$

$$d_{1\,1}^{(2)} = 8\,A\,t_{2\,3\,0} + 4\,t_{1\,4\,0} + 4\,c^2\,t_{1\,5\,0} - 2\,t_{1\,1\,1}\,t_{0\,4\,1} + 12\,B_2^2 + 8\,B_2\,(c^2\,t_{2\,3\,0} + t_{2\,2\,0})$$

$$t_{1\,5\,0} + 2\,B_2\,t_{2\,3\,0} = -\frac{1}{2c^8}\,(X_4 - A\,Y)\,Y - \frac{1}{2c^6}\,B_2\,Y^2 - 2\,c\,(B_2 - B_1)$$

XII $\quad d_{0\,2}^{(2)} = c^2\,d_{2\,0}^{(2)}$

$$d_{0\,2}^{(2)} = 4\,B_2^2\,t_{2\,3\,0} - t_{0\,4\,1}^2 + 4\,t_{0\,7\,0} + 4\,c^2\,t_{0\,8\,0} + 4\,B_2\,(t_{1\,5\,0} + c^2\,t_{1\,6\,0}) + 4\,A\,(c^2\,t_{1\,7\,0} + t_{1\,6\,0})$$

$$t_{0\,8\,0} + A\,t_{1\,7\,0} + B_2\,t_{1\,6\,0} = \frac{1}{4c^{12}}\,(X_4 + Z_2\,Y)^2 + c^2\,(B_2 - B_1)$$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir die Klassen T_{23r} $(r>8)$. Für T_{238} dürfen die Gleichungen XI und XII nicht zusammen erfüllt sein.

Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Cy$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{ij}^{(3)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{20}^{(3)} = d_{20}^{(2)} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in die Klasse T_{239} darf $d_{01}^{(3)}$ nicht verschwinden. Dagegen muß in den Fällen T_{23r} $(r>9)$ gelten:

XIII $\quad d_{01}^{(3)} = 0$

$$d_{01}^{(3)} = 4\,[A\,t_{170} + t_{080} + c^2 t_{090} + c^2 C^3 + B_2 (t_{160} + c^2 t_{170}) + C^2 (c^2 t_{230} + t_{220} + 3B_2) + C(t_{150} + c^2 t_{160} + 2B_2 t_{230})]$$

$$t_{090} + B_2 t_{170} + C t_{160} + C^2 t_{230} = -\frac{1}{4c^{14}} (X_4 + Z_3 Y)^2 - C^3$$

Das strikte Urbild der letztgenannten Kurvenfamilie besitzt in $(0,0)$ genau dann den durch die Gleichung

$$d_{20}^{(3)} (x - Dy)^2 = 0$$

beschriebenen Tangentialkegel, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

XIV $\quad d_{11}^{(3)} = -2D\,d_{20}^{(3)}$

$$d_{11}^{(3)} = 4\,[2B_2 t_{230} + t_{150} + c^2 t_{160} + 3c^2 C^2 + 2C(t_{220} + c^2 t_{230} + 3B_2)]$$

$$t_{160} + 2C t_{230} = \frac{1}{2c^{10}} (X_4 + Z_3 Y) Y - 3C^2 - 2D(B_2 - B_1)$$

XV $\quad d_{02}^{(3)} = D^2 d_{20}^{(3)}$

$$d_{02}^{(3)} = 4\,[B_2 t_{170} + C^2 t_{230} + t_{090} + C^3 + C(t_{160} + c^2 t_{170})]$$

$$0 = -\frac{1}{c^{14}} (X_4 + Z_3 Y)^2 - 4c^2 D^2 (B_2 - B_1) + 4c^2 C t_{170}$$

Mit diesem Tangentialkegelansatz erhalten wir die Klassen $T_{2\,3\,r}$ $(r>10)$. Im Fall $T_{2\,3\,10}$ dürfen die Gleichungen XIV und XV nicht zusammen erfüllt sein.

Wir substituieren nun $x \longmapsto x + Dy$ und führen anschliessend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch folgende Kurvenfamilie beschrieben:

$$\sum_{i,j\geq 0} d_{i\,j}^{(4)} x^i y^j \quad \text{mit } d_{2\,0}^{(4)} = d_{2\,0}^{(3)} \neq 0$$

Für Vereinfachungen in die Klasse $T_{2\,3\,11}$ darf $d_{0\,1}^{(4)}$ nicht verschwinden. Für Vereinfachungen in $T_{2\,3\,12}$ muß dagegen gelten:

XVI $\quad d_{0\,1}^{(4)} = 0$

$$d_{0\,1}^{(4)} = 4\,[C\,t_{1\,7\,0} + D^2\,(t_{2\,2\,0} + c^2\,t_{2\,3\,0} + 3\,c^2\,C + 3\,B_2) + D\,(t_{1\,6\,0} + c^2\,t_{1\,7\,0} + 2\,C\,t_{2\,3\,0} + 3\,C^2\,)]$$

$$0 = \frac{D}{2c^{12}}\,(X_4 + Z_3\,Y)\,Y + D^2\,(3\,C - \frac{1}{c^2}\,(B_2 - B_1) + \frac{1}{4c^6}\,Y^2 + t_{2\,3\,0}) + (D + \frac{1}{c^2}\,C)\,t_{1\,7\,0}$$

V.2.3.2.2 Analyse der Gleichungen

$Q_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$:

Hinreichend für diese Vereinfachung ist die Existenz einer Lösung der Gleichungen I bis XV des Gleichungssystems aus V.2.3.2.1 . Weiter unten werden wir beweisen:
nicht($Q_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$) , sodaß also auch gilt:
nicht($Q_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$) . Daher sind die genannten fünfzehn Gleichungen auch notwendig für die Vereinfachung $Q_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,11}$. Die Gleichungen I bis X lassen sich einfach auflösen, wenn folgende fünf Gleichungen gelöst sind:

XV $\quad 0 = c^{-14}\,(X_4 + Z_3 Y)^2 + 4c^2 D^2\,(B_2 - B_1)$

XIV $\quad 0 = \frac{1}{2}\,c^{-10}\,(X_4 + Z_3 Y)Y - 3\,C^2 - 2D\,(B_2 - B_1)$

XIII $\quad 0 = \frac{1}{4}\,c^{-14}\,(X_4 + Z_3 Y)^2 + C^3 + t_{0\,9\,0}$

XII $\quad 0 = \frac{1}{4}\,c^{-12}\,(X_4 + Z_2 Y)^2 + C^2\,(B_2 - B_1) - t_{0\,8\,0}$

XI $\quad 1 = -\frac{1}{2}\,c^{-8}\,(X_4 + Z_2 Y)Y - 2C\,(B_2 - B_1)$

Die Nebenbedingungen sind: $C \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$.
Es ist:

$$X_4 = -2b + ct_{021} - c^3 t_{031} + c^5 t_{041}$$

$$Z_2 = -A + c^2 B_2, \quad Z_3 = Z_2 - c^4 C, \quad Y = 2a - ct_{111}$$

Die Lösung der fünf Gleichungen ist für $t_{080} = 0$ und $t_{090} = 0$:

Setze: $$B_2 - B_1 =: -E^2 \implies E = \varepsilon i\sqrt{B_2 - B_1}, \quad \varepsilon^2 = 1$$

$$C =: -F^2 \implies F = \eta i\sqrt{C}, \quad \eta^2 = 1.$$

C bzw. F ist von Null verschieden, sonst erhält man mit XII in XI einen Widerspruch.
Mit $L := X_4 + Z_3 Y$ erhält man:

XV $\quad L = 2\delta c^8 DE, \quad \delta^2 = 1$

XIII $L = 2\gamma c^7 F^3, \quad \gamma^2 = 1$

Wegen XIII ist auch L von Null verschieden.
Aus den letzten beiden Beziehungen ergibt sich:

$$D = \frac{\delta\gamma F^3}{cE}$$

Das ergibt in XII : $Y = 2c^2 (c\gamma F + \beta E)$, $(\beta^2 = 1)$, und in

XIV $\quad 0 = F^3 \left(-F + 2\frac{\gamma}{c} E (\beta + \delta)\right)$

Da $F \neq 0$ ist, folgt $\beta = \delta$ und aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$F = 4\frac{\gamma\delta}{c} E.$$

Aus der vorletzten Gleichung folgt damit:

$$Y = 2c^2 (c\gamma F + \delta E).$$

Alle diese Resultate ergeben zusammen in XI eingesetzt:

$$c^2 = 2^7 E^4 \quad \text{oder} \quad c = 8\sqrt{2}\alpha E^2 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = 1.$$

Insgesamt ergibt das:

$$C = -\frac{1}{8}E^{-2}, \quad D = 2^{-8} E^{-6}, \quad Y = 2^8 5\delta E^5, \quad L = 2^{21}\delta E^{11}.$$

Beachtet man, daß die in den Definitionsgleichungen von Y und L auftretenden Parameter t_{111}, t_{021}, t_{031}, t_{041},

a und b voneinander unabhängig sind, so ist das Gleichungssystem gelöst.
Durch die Wahlen

$$a=0,\ b=0,\ A=0,\ B_2=0,\ t_{0\,2\,1}=0,\ t_{0\,3\,1}=0,\ E=\alpha\delta\gamma\frac{t}{2\sqrt{2}}$$

erhalten wir die einparametrige Familie ($\gamma=1$):

$$x^3+yz^2+xy^5+2t^4z^2+3t^2x^2y^2-ty^4z-5t^3xyz\ ,$$

welche die Vereinfachung $Q_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,11}$ beschreibt. Nach den Sätzen 5 und 6 aus IV.2.2 existiert dann auch eine Vereinfachung $Q_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$.

nicht($Q_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$):

Wir nehmen an: $Q_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,12}$. Hinreichend für eine solche Vereinfachung ist die Existenz einer Lösung der Gleichungen I bis XVI des Gleichungssystems in V.2.3.2.1 . Für die Analyse der folgenden fünf Gleichungen legen wir die in V.2.3.1 angegebene minimale transversale Scheibe von Q_{18} zugrunde (d.h.: $t_{0\,2\,1}=0,\ t_{0\,3\,1}=0,\ t_{0\,4\,1}=0,\ t_{2\,1\,0}=0,\ t_{2\,2\,0}=0,\ t_{1\,1\,1}=0$).

$$\begin{array}{ll}
\text{XVI} & 0=\frac{1}{2}c^{-12}D(X_4+Z_3Y)Y+D^2(3C-c^{-2}(B_2-B_1)+\frac{1}{4}c^{-6}Y^2) \\
& \quad +(D+c^{-2}C)t_{1\,7\,0} \\
\text{XV} & 0=-c^{-14}(X_4+Z_3Y)^2-4c^2D^2(B_2-B_1)+4c^2Ct_{1\,7\,0} \\
\text{XIV} & 0=\frac{1}{2}c^{-10}(X_4+Z_3Y)Y-3C^2-2D(B_2-B_1)-t_{1\,6\,0} \\
\text{XIII} & 0=\frac{1}{4}c^{-14}(X_4+Z_3Y)^2+C^3+B_2t_{1\,7\,0}+Ct_{1\,6\,0} \\
\text{XII} & 1=\frac{1}{4}c^{-12}(X_4+Z_2Y)^2+c^2(B_2-B_1)-At_{1\,7\,0}-B_2t_{1\,6\,0}
\end{array}$$

Wir zeigen die Nichtexistenz einer Lösung dieser fünf Gleichungen für den Fall $t_{1\,6\,0}=0$ und $t_{1\,7\,0}=0$. Nach Satz 3 aus IV.2.2 existiert dann auch keine Vereinfachung für beliebige $t_{1\,6\,0}$ und $t_{1\,7\,0}$.
Wir setzen:

$$B_2-B_1=:-E^2\ ,\qquad C=:-F^2\quad \text{und}\ L:=X_4+Z_3Y$$

Dann erhält man aus

XV: $L=2\varepsilon c^8DE,\ \varepsilon^2=1$; eingesetzt in

XIII: $D=\eta(cE)^{-1}F^3\ ,\ \eta^2=1.$

Damit wiederum erhält man:

$$L = 2\varepsilon\eta c^7 F^3.$$

Den letzten Ausdruck für D setzen wir in XIV ein:

$$LY = 2c^9 F^3 (3cF - 2\eta E).$$

Wäre F Null, so auch L. Das führt aber in XII zum Widerspruch. Daher sind F, L und D von Null verschieden. Wir können daher die letzte Gleichung nach Y auflösen und erhalten:

$$Y = \varepsilon\eta c^2 (3cF - 2\eta E).$$

Aus XII folgt dann:

$$E = \frac{c^2F^6 - 4}{4\eta c F^5}.$$

Da $E \neq 0$ ist, gilt: $c^2F^6 - 4 \neq 0$. Insgesamt ergibt sich:

$$L = 2\varepsilon\eta c^7 F^3, \quad D = \frac{4F^8}{c^2F^6 - 4} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\varepsilon\eta c}{2F^5}(5c^2F^6 + 4).$$

Dies alles in XVI eingesetzt ergibt:

$$0 = -\frac{3DF^{10}}{c^2F^6 - 4}.$$

Das steht im Widerspruch zu $D \neq 0$ und $F \neq 0$.

V.2.4 Untersuchung der Klassen $W_{1,0}$, W_{17} und W_{18}

Zum Beweis des Theorems 1 aus Kapitel III ist für die Klassen W_{17} und W_{18} noch zu zeigen:

$W_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$,

$W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}$,

nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,13}$),

nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,4\,11}$),

nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,7\,8}$).

Dabei gelten

nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,4\,11}$) und nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,7\,8}$),

da andernfalls nach IV.3.2.4 Vereinfachungen

$S_{17} \xrightarrow{\exists} T_{3\,3\,10}$ bzw. $S_{17} \xrightarrow{\exists} T_{3\,6\,7}$

existieren würden. Die Milnorgitter $L(T_{3\,3\,10})$ und $L(T_{3\,6\,7})$ lassen sich jedoch nicht primitiv in $L(S_{17})$ einbetten.

Zum Beweis von Theorem 2 aus Kapitel III ist im Fall

$W_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{14}$

noch zu zeigen, daß nur für $a_o = 0$ eine Vereinfachung von

$x^4 + a_o x^2 y^3 + y^6 \quad (a_o^2 \neq 4)$

nach E_{14} existiert.
Durch eine Analyse der Gleichungen für

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{13}$ und $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,9}$

zeigen wir, daß für die in 2.4.1 angegebene minimale gute transversale Scheibe $\mathcal{T} : T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(2)$ von $x^4 + y^6$

kein $t \in T^+$ mit $\mathcal{T}(t) \in E_{13}$ bzw. $\mathcal{T}(t) \in T_{2\,3\,9}$ existiert. Dies gilt nach IV.2.4 für jede minimale gute transversale Scheibe der Singularität.

V.2.4.1 Allgemeiner Teil

$W_{1,0}$:

Wir verwenden die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform

$$f_{a_0,a_1}(x,y) = x^4 + a_0 x^2 y^3 + y^6 + a_1 x^2 y^4 \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C};\ a_0^2 \neq 4) .$$

Der semiquasihomogene Typ dieser Singularitäten ist (3,2;12).

Das Poincarépolynom ist

$$\chi(t) = t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 + 2t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1 .$$

V_j bezeichne die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ (3,2;j).

j	V_j
0	1
2	y
3	x
4	y^2
5	xy
6	x^2, y^3
7	xy^2
8	x^2y, y^4
9	x^3, xy^3
10	x^2y^2, y^5
11	x^3y, xy^4
12	x^4, x^2y^3, y^6
14	x^4y, x^2y^4, y^7

Lemma:

(i) Eine monomiale Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{a_0,0}$ ($a_0^2 \neq 4$) wird durch

$\{ x^k y^\ell \mid 0 \le k \le 2 ;\ 0 \le \ell \le 4 \}$

repräsentiert.

(ii) Die Monome

$\{ x^3,\ x^2y^k\ (0 \le k \le 4),\ xy^k\ (1 \le k \le 4),\ y^k\ (2 \le k \le 5) \}$

repräsentieren eine Basis von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{a_0,0}$.

Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5 .

□

W_{17}:

Wir verwenden die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform

$$f_{a_0,a_1}(x,y) = x^4 + xy^5 + a_0 y^7 + a_1 y^8 \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C}) .$$

Die Singularitäten sind semiquasihomogen vom Typ (5,3;20) .

Das Poincarépolynom ist

$$\chi(t) = t^{24} + t^{21} + t^{19} + t^{18} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^{9} + t^{8} + t^{6} + t^{5} + t^{3} + 1$$

Es sei V_j die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ (5,3;j).

j	V_j	j	V_j	j	V_j	j	V_j
0	1	9	y^3	14	xy^3	21	x^3y^2, y^7
3	y	10	x^2	15	x^3, y^5	24	x^3y^3, y^8
5	x	11	xy^2	16	x^2y^2		
6	y^2	12	y^4	18	x^3y, y^6		
8	xy	13	x^2y	19	x^2y^3		

Lemma:

(i) Die Monome

$\{ x^k y^\ell \ (\ell = 1,2 \ ; \ 0 \le k \le 3), \ y^k \ (0 \le k \le 8 \}$

repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{o,o}$.

(ii) Die Monome

$\{ x^3, \ x^2y^k \ (0 \le k \le 3), \ xy^k \ (1 \le k \le 4), \ y^k \ (2 \le k \le 8)$

repräsentieren eine Basis von $m^2/m\Delta f_{o,o}$. Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5 .

□

W_{18}:

Wir verwenden die von Arnold angegebene Normalform

$$f_{a_0,a_1}(x,y) = x^4 + y^7 + a_0x^2y^4 + a_1x^2y^5 \quad (a_0,a_1 \in \mathbb{C}) .$$

Die Singularitäten sind semiquasihomogen vom Typ (7,4;28) .

Das Poincarépolynom ist

$$\chi(t) = t^{34} + t^{30} + t^{27} + t^{26} + t^{23} + t^{22} + t^{20} + t^{19} + t^{18} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{8} + t^{7} + t^{4} + 1 .$$

V_j bezeichne die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ (7,4;j) .

j	v_j
0	1
4	y
7	x
8	y^2
11	xy

j	v_j
12	y^3
14	x^2
15	xy^2
16	y^4
18	x^2y

j	v_j
19	xy^3
20	y^5
22	x^2y^2
23	xy^4
26	x^2y^3

j	v_j
27	xy^5
30	x^2y^4
34	x^2y^5

<u>Lemma</u>:

(i) Eine monomiale Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{o,o}$ wird durch

$\{ x^k y^\ell \ (0 \leq k \leq 2,\ 0 \leq \ell \leq 5) \}$

repräsentiert.

(ii) Die Monome

$\{ x^3,\ x^2y^k \ (0 \leq k \leq 5),\ xy^k \ (1 \leq k \leq 5),\ y^k \ (2 \leq k \leq 6) \}$

repräsentieren eine Basis von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{o,o}$. Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5 . □

Im folgenden sei $\mathcal{F}: \mathbb{C}^{20} \longrightarrow \mathfrak{m}^2(2)$ die Familie

$\mathcal{F}(d) :=$

$$x^4 + \sum_{0\leq k\leq 1} d_{3\,k}x^3y^k + \sum_{0\leq k\leq 5} d_{2\,k}x^2y^k + \sum_{1\leq k\leq 5} d_{1\,k}xy^k + \sum_{2\leq k\leq 8} d_{0\,k}y^k .$$

Für die quasihomogenen Singularitäten der angegebenen Normalformen von $W_{1,0}$, W_{17} und W_{18} definiert $\mathcal{F}$ (minimale) transversale Scheiben $\mathcal{T}: T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(2)$, wenn wir die Parameter $d_{k\,\ell}$ gemäß folgender Tabelle substituieren. $T = T^+ \oplus T^o \oplus T^-$ bezeichne die durch die $\mathbb{C}^*$-Aktion induzierte Zerlegung des Parameterraumes der transversalen Scheibe.

Klasse	Substitutionen für eine transversale Scheibe	Parameter der trans.S. für T^o	für T^-
$W_{1,0}$	$d_{0\,6} = 1$, $d_{23} = a_o + d'_{23}$ $(a_o^2 \neq 4)$ $d_{0\,8} = d_{0\,7} = d_{2\,5} = d_{1\,5} = 0$	$d'_{2\,3}$	$d_{2\,4}$
W_{17}	$d_{1\,5} = 1$, $d_{2\,4} = d_{2\,5} = 0$	——	$d_{0\,7}$, $d_{0\,8}$
W_{18}	$d_{0\,7} = 1$, $d_{0\,8} = 0$	——	$d_{2\,4}$, $d_{2\,5}$

Die transversalen Scheiben sind <u>minimal</u>, wenn zusätzlich $d_{3\,1} = 0$.

V.2.4.2 Untersuchung $W \longrightarrow E$

2.4.2.1 Aufstellen der Gleichungen

Soll $\mathcal{F}(d)$ für $d \neq 0$ eine Singularität der Gruppierung E sein, so muß der 3-Jet von $\mathcal{F}(d)$ die Gestalt $(\alpha x + \beta y)^3$ mit $(\alpha,\beta) \neq 0$ haben. Da das Monom x^4 von $\mathcal{F}(d)$ den Koeffizienten 1 hat, folgt: Für $\alpha = 0$ liegt eine E_6-Singularität, also eine einfache Singularität vor (siehe [Ar 3], § 4 , Theoreme 6_1 und 7_1).

Im folgenden sei daher

$\mathcal{F}(d) = d_{3\,0}(x - Ay)^3 \bmod m^4$ mit $\underline{d_{3\,0} \neq 0}$,

also

$$d_{2\,0} = 0, \qquad d_{1\,1} = 0, \qquad d_{0\,2} = 0,$$

I $\quad d_{2\,1} = -3Ad_{3\,0}$, $\quad$ II $\quad d_{1\,2} = 3A^2 d_{3\,0}$, $\quad$ III $\quad d_{0\,3} = -A^3 d_{3\,0}$.

Wir substituieren $x \longmapsto x + Ay$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum d^{(1)}_{k\,\ell} x^k y^\ell \text{ mit } d^{(1)}_{0\,0} = d^{(1)}_{1\,0} = d^{(1)}_{2\,0} = 0 \text{ und } d^{(1)}_{3\,0} = d_{3\,0} \neq 0$$

beschrieben.

Damit $\mathcal{F}(d)$ zu einer von $T_{2\,3\,6}$ verschiedenen Klasse der Gruppierung E gehört, muß hier der 3-Jet von der Gestalt

$$d_{3\,0}(x - B_1 y)^2 (x - B_2 y)$$

sein. Dies liefert die Bedingungen

IV $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$$d_{0\,4} + Ad_{1\,3} + A^2 d_{2\,2} + A^3 d_{3\,1} + A^4 = 0$$

V $\quad d^{(1)}_{1\,1} = 0$

$$d_{1\,3} + 2Ad_{2\,2} + 3A^2 d_{3\,1} + 4A^3 = 0$$

VI $\quad d^{(1)}_{0\,2} = 0$

$$d_{0\,5} + Ad_{1\,4} + A^2 d_{2\,3} = 0$$

VII $\quad d_{21}^{(1)} = -d_{30}(2B_1 + B_2)$

$$d_{22} + 3Ad_{31} + 6A^2 = -d_{30}(2B_1 + B_2)$$

VIII $\quad d_{12}^{(1)} = d_{30}(B_1 + 2B_2)B_1$

$$d_{14} + 2Ad_{23} = d_{30}(B_1 + 2B_2)B_1$$

IX $\quad d_{03}^{(1)} = -d_{30}B_1^2B_2$

$$d_{06} + Ad_{15} + A^2d_{24} = -d_{30}B_1^2B_2$$

$\underline{W \longrightarrow T_{23r}}$ $(r \geq 7)$:

Soll eine T_{23r} - Singularität $(r \geq 7)$ vorliegen, so müssen die drei Gleichungen für die Multiplizität und die Gleichungen I - IX mit

$$\underline{d_{30} \neq 0} \quad \text{und} \quad \underline{B_1 \neq B_2}$$

erfüllt sein.

Wir substituieren $x \longmapsto x + B_1y$ und führen anschließend einen σ - Prozeß aus. Das strikte Urbild wird durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d_{k\ell}^{(2)} x^k y^\ell \quad \text{mit} \quad d_{00}^{(2)} = d_{10}^{(2)} = 0\,, \quad d_{20}^{(2)} = d_{30}(B_1 - B_2) \neq 0$$

beschrieben. Wir erhalten als notwendige Bedingung für:

$\underline{T_{238}}$:

X $\quad d_{01}^{(2)} = 0$

$$(d_{07} + A^2d_{25}) + B_1(d_{15} + 2Ad_{24}) + B_1^2d_{23} + B_1^3(d_{31} + 4A) = 0$$

$\underline{T_{239}}$: Der Tangentialkegel muß durch eine Gleichung

$$d_{30}(B_1 - B_2)(x - Cy)^2$$

beschrieben werden. Wir erhalten die zusätzlichen Bedingungen:

XI $\quad d_{11}^{(2)} = -2d_{30}(B_1 - B_2)C$

$$(d_{15} + 2Ad_{24}) + 2B_1d_{23} + 3B_1^2(d_{31} + 4A) = -2d_{30}(B_1 - B_2)C$$

XII $\quad d_{02}^{(2)} = d_{30}(B_1 - B_2)C^2$

$$d_{08} + B_1(2Ad_{25}) + B_1^2d_{24} + B_1^4 = d_{30}(B_1 - B_2)C^2$$

Wir substituieren $x \longmapsto x + Cy$ und führen dann einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Familie

$$\sum d_{k\ell}^{(3)} x^k y^\ell \quad \text{mit} \quad d_{00}^{(3)} = d_{10}^{(3)} = 0,\ d_{20}^{(3)} = d_{30}(B_1 - B_2)$$

beschrieben. Wir erhalten als weitere notwendige Bedingungen für:

$\underline{T_{2\,3\,10}}$:

XIII $\quad d_{01}^{(3)} = 0$

$$B_1^2 d_{25} + C(2Ad_{25} + 2B_1 d_{24} + 4B_1^3) + C^2(d_{23} + 3B_1(d_{31} + 4A)) + C^3 d_{30} = 0$$

$\underline{T_{2\,3\,11}}$: Der Tangentialkegel muß durch eine Gleichung

$$d_{30}(B_1 - B_2)(x - Dy)^2$$

beschrieben werden.

XIV $\quad d_{11}^{(3)} = -2d_{30}(B_1 - B_2)D$

$$(2Ad_{25} + 2B_1 d_{24} + 4B_1^3) + 2C(d_{23} + 3B_1(d_{31} + 4A)) + 3C^2 d_{30} = -2d_{30}(B_1 - B_2)D$$

XV $\quad d_{02}^{(3)} = d_{30}(B_1 - B_2)D^2$

$$2CB_1 d_{25} + C^2(d_{24} + 6B_1^2) + C^3(d_{31} + 4A) = d_{30}(B_1 - B_2)D^2$$

Wir substituieren schließlich $x \longmapsto x + Dy$ und führen einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d_{k\ell}^{(4)} x^k y^\ell \quad \text{mit} \quad d_{00}^{(4)} = d_{10}^{(4)} = 0,\ d_{20}^{(4)} = d_{30}(B_1 - B_2)$$

beschrieben. Wir erhalten als weitere notwendige Bedingung für:

$\underline{T_{2\,3\,12}}$:

XVI $\quad d_{01}^{(4)} = 0$

$$(C^2 d_{25} + 4B_1 C^3) + D(2B_1 d_{25} + 2C(d_{24} + 6B_1^2) + 3C^2(d_{31} + 4A)) + D^2(d_{23} + 3B_1(d_{31} + 4A) + 3Cd_{30}) = 0$$

$\underline{T_{2\,3\,13}}$: Der Tangentialkegel muß durch eine Gleichung

$$d_{3\,0}(B_1 - B_2)(x - Ey)^2$$

beschrieben werden. Wir erhalten die zusätzlichen Bedingungen:

XVII $\quad d^{(4)}_{1\,1} = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)E$

$$(2B_1 d_{2\,5} + 2C(d_{2\,4} + 6B_1^2) + 3C^2(d_{3\,1} + 4A)) + 2D(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A) + 3Cd_{3\,0}) = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)E$$

XVIII $\quad d^{(4)}_{0\,2} = d_{3\,0}(B_1 - B_2)E^2$

$$C^4 + D(2Cd_{2\,5} + 3C^2 \cdot 4B_1) + D^2(d_{2\,4} + 6B_1^2 + 3C(d_{3\,1} + 4A)) + D^3 d_{3\,0} = d_{3\,0}(B_1 - B_2)E^2$$

$\underline{W \longrightarrow E_\mu}$ ($\mu = 12,\ 13,\ 14$):

$\underline{E_{12}}$: Die drei Gleichungen für die Multiplizität, die Gleichungen I - IX und die Ungleichung

$$\underline{d_{3\,0} \neq 0}$$

müssen gelten mit $\underline{B := B_1 = B_2}$.

$\underline{E_{13}}$: Die Familie

$$\sum d^{(2)}_{k\,\ell}\, x^k y^\ell$$

sei wie in " $W \longrightarrow T_{2\,3\,r}$ " definiert. Da

$$d^{(2)}_{0\,0} = d^{(2)}_{1\,0} = 0$$

erhalten wir die Bedingung:

X' $\quad d^{(2)}_{0\,1} = 0$

$$(d_{0\,7} + A^2 d_{2\,5}) + B(d_{1\,5} + 2Ad_{2\,4}) + B^2 d_{2\,3} + B^3(d_{3\,1} + 4A) = 0$$

$\underline{E_{14}}$: Es ist $d^{(2)}_{2\,0} = 0$. Damit der 2-Jet die Gestalt $(\alpha x + \beta y)^2$ mit $(\alpha,\beta) \neq 0$ hat, muß gelten:

XI' $\quad d^{(2)}_{1\,1} = 0$

$$(d_{1\,5} + 2Ad_{2\,4}) + 2Bd_{2\,3} + 3B^2(d_{3\,1} + 4A) = 0$$

2.4.2.2 Analyse der Gleichungen

$W_{1,0}$: Für jede quasihomogene Singularität in der Normalform

$$x^4 + a_0 x^2 y^3 + y^6 \quad (a_0^2 \neq 4)$$

erhalten wir eine transversale Scheibe $\mathcal{T} : T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(2)$, wenn wir in der Familie $\mathcal{F}(d)$ die Parameter wie folgt setzen:

$$d_{06} = 1, \quad d_{23} = a_0 + d'_{23}$$

$$d_{25} = d_{15} = d_{07} = d_{08} = 0 \quad \text{(vergl. 2.4.1)}.$$

Es genügt für jede quasihomogene Singularität der Normalform das T^+ - Stratum zu untersuchen. Daher setzten wir:

$$d'_{23} = 0 \text{ (also } d_{23} = a_0 \text{)}, \; d_{24} = 0 .$$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{239}$:

Beweis: Die Ungleichungen $d_{30} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$, die drei Gleichungen für die Multiplizität und die Gleichungen I - XII sind, nachdem die Parameter wie oben für W_{10} angegeben gesetzt sind, notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $d \in T^+$ die Singularität $\mathcal{T}(d)$ zu einer Klasse T_{23r} $(r \geq 9)$ gehört.
Da aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:

$$\text{nicht}(W_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,10}),$$

sind sie sogar notwendig und hinreichend dafür, daß eine T_{239} - Singularität vorliegt.
In den Gleichungen I - VIII können leicht die Parameter d_{21}, d_{12}, d_{03}, d_{04}, d_{13}, d_{05}, d_{22} und d_{14} eliminiert werden.
Es verbleiben die Gleichungen:

IX $\quad 1 = -d_{30} B_1^2 B_2$

X $\quad B_1^2 a_0 + B_1^3 (d_{31} + 4A) = 0$

XI $\quad 2B_1 a_0 + 3B_1^2 (d_{31} + 4A) = -2d_{30}(B_1 - B_2)C$

XII $\quad B_1^4 = d_{30}(B_1 - B_2)C^2$,

die für $a_0 = 0$ keine gemeinsame Lösung besitzen.
Für $a_0 \neq 0$ erhalten wir die Lösungen:

$$d_{31} + 4A = -\frac{a_0}{B_1} \qquad B_2 = \frac{4}{4-a_0^2} B_1$$

$$C = 2\frac{B_1^3}{a_o} \qquad d_{3\,0} = -\frac{4-a_o^2}{4}\frac{1}{B_1^3}$$

Wir erhalten (vergleiche II.2.4.5):

$$H(T_{2\,3\,9}) = \{a_o \in \mathbb{C} - \{\pm 2\} \mid \exists d \in T^+ : \Gamma(d) \in T_{2\,3\,9}\} = \mathbb{C} - \{0,\pm 2\},$$

also

$$\overline{H(T_{2\,3\,9})} = \mathbb{C} - \{\pm 2\}.$$

□

Bemerkung: Die Lösungen mit $A = 0$, $B_1 = -1/t$ definieren die Familie

$$x^4 + a_o(tx+y^2)x^2y + (tx+y^2)^2\left(\frac{4-a_o^2}{4}tx + y^2\right) \quad (a_o \neq 0,\pm 2).$$

Diese beschreibt für $a_o = 0$ eine Vereinfachung nach E_{14}.

Untersuchung $W_{1,0} \longrightarrow E_{13}, E_{14}$

Da $\mu(W_{1,0}) = 15$, gilt, nachdem die Parameter für $W_{1,0}$ wie oben angegeben gesetzt sind:
Für $d \in T^+$ gehört $\Gamma(d)$ zur Klasse E_{14} genau dann, wenn die drei Gleichungen für die Multiplizität, die Gleichungen I - IX, X' und XI' mit $d_{3\,0} \neq 0$ und $B := B_1 = B_2$ erfüllt sind.
Eine E_{13} - Singularität liegt genau dann vor, wenn all diese Bedingungen außer XI' erfüllt sind.
In den Gleichungen I - VIII können leicht die Parameter $d_{2\,1}$, $d_{1\,2}$, $d_{0\,3}$, $d_{0\,4}$, $d_{1\,3}$, $d_{0\,5}$, $d_{2\,2}$ und $d_{1\,4}$ eliminiert werden.
Es verbleiben die Gleichungen:

IX $\quad 1 = -d_{3\,0}B^3$

X' $\quad B^2a_o + B^3(d_{3\,1} + 4A) = 0$

XI' $\quad 2Ba_o + 3B^2(d_{3\,1} + 4A) = 0$

Die Gleichungen IX und X' haben die Lösungen

$$d_{3\,0} = -1/B^3 \qquad d_{3\,1} + 4A = -a_o/B.$$

Setzen wir diese in XI' ein, so erhalten wir

$$-Ba_o = 0,$$

also $a_o = 0$.

Es folgt (vergleiche II.2.4.5):

$H(E_{14}) = \{a_o \in \mathbb{C} - \{\pm 2\} \mid \exists d \in T^+ : \mathcal{T}(d) \in E_{14}\} = \{0\}$

$H(E_{13}) = \{a_o \in \mathbb{C} - \{\pm 2\} \mid \exists d \in T^+ : \mathcal{T}(d) \in E_{13}\} = \mathbb{C} - \{0, \pm 2\}$

$\overline{H(E_{13})} = \mathbb{C} - \{\pm 2\}$

$\square$

Bemerkung: Die Lösungen mit $A = 0$, $B = -1/t$ definieren die stetige Familie

$$x^4 + a_o(tx + y^2)\, x^2y + (tx + y^2)^3 \quad (a_o^2 \neq 4),$$

die für $a_o \neq 0$ die Vereinfachung nach E_{13} und für $a_o = 0$ die Vereinfachung nach E_{14} beschreibt.

W_{17}: Setzen wir

$$d_{1\,5} = 1, \quad d_{2\,4} = d_{2\,5} = 0,$$

so definiert $\mathcal{F}(d)$ eine transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow m^2(2)$ der quasihomogenen Singularität $x^4 + xy^5$ von W_{17}.
Da $T^+ = \{d \in T \mid d_{0\,7} = d_{0\,8} = 0\}$, setzen wir

$$d_{0\,7} = 0, \quad d_{0\,8} = 0.$$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,11}$:

Beweis: Nachdem die Parameter wie für W_{17} angegeben gesetzt sind, sind die Ungleichungen $d_{3\,0} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$, die drei Gleichungen für die Multiplizität und die Gleichungen I - XV notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $d \in T^+$ die Singularität $\mathcal{T}(d)$ zu einer Klasse $T_{2\,3\,r}$ $(r \geq 11)$ gehört. Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt, daß sich keine W_{17}-Singularität nach $T_{2\,3\,12}$ vereinfacht. Genügt $d \in T^+$ also diesen algebraischen Bedingungen, so folgt $\mathcal{T}(d) \in T_{2\,3\,11}$.
In den Gleichungen I - IX lassen sich leicht die neun Parameter $d_{2\,1}, d_{1\,2}, d_{0\,3}, d_{0\,4}, d_{1\,3}, d_{0\,5}, d_{2\,2}, d_{1\,4}$ und $d_{0\,6}$ eliminieren. Es verbleiben die Gleichungen:

X $\quad B_1 + B_1^2 d_{2\,3} + B_1^3(d_{3\,1} + 4A) = 0$

XI $\quad 1 + 2B_1 d_{2\,3} + 3B_1^2(d_{3\,1} + 4A) = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)C$

XII $\quad B_1^4 = d_{3\,0}(B_1 - B_2)C^2$

XIII $\quad 4CB_1^3 + C^2(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A)) + C^3 d_{3\,0} = 0$

XIV $\quad 4B_1^3 + 2C(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A)) + 3C^2 d_{3\,0} = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)D$

XV $\quad 6C^2B_1^2 + C^3(d_{3\,1} + 4A) = d_{3\,0}(B_1 - B_2)D^2$

Aus XI und XII folgt:

(1) $\quad B_1 \neq 0,\ C \neq 0,\ B_1 \neq B_2,\ d_{3\,0} \neq 0$

(Die Ungleichungen $d_{3\,0} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$ sind also für alle Lösungen der Gleichungen erfüllt.)

(2)	$d_{3\,0}(B_1 - B_2) = B_1^4 / C^2$	[XII]
(3)	$d_{2\,3} = -1/B_1 - B_1(d_{3\,1} + 4A)$	[X]
(4)	$d_{3\,1} + 4A = 1/B_1^2 - 2B_1^2/C$	[XI, 2, 3]
(5)	$d_{3\,0} = 4B_1^3 / C^2 - 2B_1^4 D / C^4$	[XIII, XIV, 2]
(6)	$4C^2B_1^2 + C^3 / B_1^2 = B_1^4 D^2 / C^2$	[XV, 2, 4]
(7)	$4C^2B_1^2 + C^3 / B_1^2 = 2B_1^3 D$	[XIII, 3, 4, 5]
(8)	$D^2 = 2C^2 D / B_1$	[6, 7]

Wäre $D \neq 0$, also $D = 2C^2 / B_1$, so ergäbe sich aus Gleichung (7) $C^3 / B_1^2 = 0$, also $C = 0$ im Widerspruch zu (1). Die Gleichungen haben also die Lösungen:

$D = 0$	$d_{3\,0} = 1/(4B_1^5)$	$d_{2\,3} = -5/(2B_1)$
$C = -4B_1^4$	$d_{3\,1} + 4A = 3/(2B_1^2)$	$B_2 = (3/4)B_1$

mit $B_1 \neq 0$.

Mit den Sätzen 6 und 5 aus IV.2.2 können wir schließen:

$$x^4 + xy^5 + y^7 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,11}, \text{ also } W_{17} \xrightarrow{\nu} T_{2\,3\,11}. \quad \square$$

<u>Bemerkung</u>: Die Lösungen mit $A = 0$, $B_1 = -1/2t$ definieren die stetige Familie

$$x^4 + (2tx + y^2)(3tx + y^2)xy - t^2(2tx + y^2)^2(2tx + {}^3/_4\, y^2).$$

<u>W_{18}</u>: Setzen wir

$$d_{0\,7} = 1, \quad d_{0\,8} = 0,$$

so definiert $F(d)$ eine transversale Scheibe der quasihomogenen Singularität $x^4 + y^7$ von W_{18}. Dabei ist $T^+ = \{d \in T \mid d_{2\,4} = d_{2\,5} = 0\}$. Wir setzen daher $d_{2\,4} = 0$, $d_{2\,5} = 0$.

$W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}$; nicht($W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,13}$)

Beweis: Sind die Parameter wie für W_{18} angegeben gesetzt, so sind die Ungleichungen $d_{3\,0} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$, die drei Gleichungen für die Multiplizität und die Gleichungen I - XVI notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $d \in T^+$ $\bar{\iota}(d)$ zu einer Klasse $T_{2\,3\,r}$ ($r \geq 12$) gehört. Dabei liegt eine Klasse $T_{2\,3\,r}$ mit $r \geq 13$ genau dann vor, wenn auch die Gleichungen XVII und XVIII gelten.

In den Gleichungen I - IX können leicht die neun Parameter $d_{2\,1}$, $d_{1\,2}$, $d_{0\,3}$, $d_{0\,4}$, $d_{1\,3}$, $d_{0\,5}$, $d_{2\,2}$, $d_{1\,4}$ und $d_{0\,6}$ eliminiert werden. Es verbleiben die Gleichungen:

X $\quad 1 + B_1 d_{1\,5} + B_1^2 d_{2\,3} + B_1^3(d_{3\,1} + 4A) = 0$

XI $\quad d_{1\,5} + 2B_1 d_{2\,3} + 3B_1^2(d_{3\,1} + 4A) = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)C$

XII $\quad B_1^4 = d_{3\,0}(B_1 - B_2)C^2$

XIII $\quad 4B_1^3 C + C^2(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A)) + C^3 d_{3\,0} = 0$

XIV $\quad 4B_1^3 + 2C(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A)) + 3C^2 d_{3\,0} = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)D$

XV $\quad 6B_1^2 C^2 + C^3(d_{3\,1} + 4A) = d_{3\,0}(B_1 - B_2)D^2$

XVI $\quad 4B_1 C^3 + D(12CB_1^2 + 3C^2(d_{3\,1} + 4A))$

$\qquad + D^2(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A) + 3Cd_{3\,0}) = 0$

XVII $\quad 12B_1^2 C + 3C^2(d_{3\,1} + 4A) + 2D(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} + 4A) + 3Cd_{3\,0})$

$\qquad = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)E$

XVIII $\quad C^4 + 12DC^2 B_1 + 6D^2 B_1^2 + 3D^2 C(d_{3\,1} + 4A) + D^3 d_{3\,0}$

$\qquad = d_{3\,0}(B_1 - B_2)E^2$

Wir bestimmen zunächst die Lösungen der Gleichungen I - XVI. Aus den Gleichungen X und XII folgt:

(1) $\quad B_1 \neq 0,\ B_1 \neq B_2,\ d_{3\,0} \neq 0,\ C \neq 0$

(Insbesondere erfüllt also jede Lösung dieser Gleichungen die Ungleichungen $d_{3\,0} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$.)

(2) $\quad d_{1\,5} = -1/B_1 - B_1 d_{2\,3} - B_1^2(d_{3\,1} + 4A)$ $\qquad$ [X]

(3) $\quad d_{3\,0}(B_1 - B_2) = B_1^4 / C^2$ $\qquad$ [XII]

(4) $d_{2\,3} = B_1^{-2} - 2B_1^3C^{-1} - 2B_1(d_{3\,1} + 4A)$ [XI, 2, 3]

(5) $d_{3\,0} = 4B_1^3C^{-2} - 2B_1^4C^{-4}D$ [XIII, XIV, 3]

(6) $d_{3\,1} + 4A = B_1^4C^{-5}D^2 - 6B_1^2C^{-1}$ [XV, 3]

(7) $D^3 - 4B_1^{-1}C^2D^2 + 6B_1^{-2}C^4D - 4B_1^{-3}C^6 = 0$ [XVI, 6, $2C^{-1}$XIV $- 3C^{-2}$XIII]

$\iff (D^3 - 2B_1^{-1}C^2)(D-(1+i)B_1^{-1}C^2)(D-(1-i)B_1^{-1}C^2) = 0$

$\iff D = \gamma B_1^{-1}C^2$ mit $\gamma \in \{2,\ 1+i,\ 1-i\}$

(8) $D^2 - 2B_1^{-1}C^2D + B_1^{-7}C^5 = 0$ [XIV, 4, 5, 6]

(9) $C = (2\gamma - \gamma^2)B_1^5$ [7, 8]

$\gamma = 2$ führt auf $C = 0$, im Widerspruch zu (1). Folglich muß $\gamma = 1 + \varepsilon i$ mit $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ sein. Die Gleichungen I - XVI haben also die Lösungen

$C = 2B_1^5$ $\qquad d_{2\,3} = 2(3-\varepsilon i)B_1^{-2}$ $\qquad B_2 = \frac{3-\varepsilon i}{4}B_1$

$D = 4(1+\varepsilon i)B_1^9$ $\qquad d_{3\,0} = \frac{1-\varepsilon i}{2}B_1^{-7}$

$d_{3\,1} + 4A = -(3-\varepsilon i)B_1^{-3}$ $\qquad d_{1\,5} = -(4-\varepsilon i)B_1^{-1}$

mit $B_1 \neq 0$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Setzen wir diese Lösungen in die Gleichungen XVII und XVIII ein, so erhalten wir:

$$E = -8(1-\varepsilon i)B_1^{13}$$
$$E^2 = 64(1-4\varepsilon i)B_1^{26}$$

Die Gleichungen I - XVIII besitzen also keine gemeinsamen Lösungen

Daher können wir mit den Sätzen 6 und 5 aus IV.2.2 schließen:

$$x^4 + y^7 + x^2y^4 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,12}\text{, also } W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,12}.$$

Wir setzen nun zusätzlich $d_{3\,1} = 0$, um eine minimale transversale Scheibe von $x^4 + y^7$ zu erhalten.

Dann ist $\{d \in T^+ \mid \bar{T}(d) \in T_{2\,3\,13}\} = \emptyset$ und $\{d \in T^+ \mid \mu(\bar{T}(d)) = 18\} = \{0\}$.

Da $\mu(T_{2\,3\,13}) = 17$ kann es also kein $d \in T^+ - \{0\}$ mit $\bar{T}(d) \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,13}$ geben. Also folgt mit Satz 3, Kapitel IV.2.2 :

$$x^4 + y^7 \not\xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,13}. \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u>: Die Lösungen der Gleichungen I - XVI mit $A = 0$ und $t = B_1^{-1}$ definieren die stetige Familie

$$x^4 - (3-\varepsilon i)t(tx-y^2)^2xy - (tx-y^2)y^5 + \frac{1-\varepsilon i}{2}t^4(tx-y^2)^2(tx - \frac{3-\varepsilon i}{4}y^2)$$

V.2.5 Untersuchung der Klassen $S_{1,0}$, S_{16}, S_{17}

Zum Beweis von Theorem 1 aus Kapitel III ist für die Klassen S_{16} und S_{17} noch zu zeigen:

$$\text{nicht}(S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,9}),$$
$$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,10},$$
$$S_{17} \longrightarrow T_{2\,5\,9}.$$

Um nicht$(S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,9})$ zu zeigen, führen wir eine Analyse der Gleichungen durch für:

$$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,9},$$
$$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,5\,8}.$$

Für den Beweis von Theorem 2, Kapitel III, zeigen wir für die quasihomogenen Singularitäten

$$f_{a_0,0}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^3z + a_0x^2y^2 \qquad (a_0(a_0-1) \neq 0)$$

aus $S_{1,0}$:

$$f_{a_0,0} \xrightarrow[\mu]{} E_{13} \iff a_0 \in \{1/4, 3/4\}.$$

Wir zeigen durch eine Analyse der Gleichungen für

$$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,8} \quad \text{und} \quad S_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12},$$

daß für die in 2.5.1 konstruierten minimalen guten Scheiben von $f_{a_0,0}$ gilt: $\{t \in T^+ \mid \overline{I}(t) \in T_{2\,3\,8}\}$ und $\{t \in T^+ \mid \overline{I}(t) \in E_{12}\}$ besteht für $a_0 \in \{1/4, 3/4\}$ aus einem $\mathbb{C}^*$-Orbit und für $a_0 \in \{1/4, 3/4\}$ aus zwei $\mathbb{C}^*$-Orbits.

2.5.1 Allgemeiner Teil

$S_{1,0}$:

Die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform ist:

$$f'_{b_0,b_1}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^5 + b_0y^3z + b_1y^4z \quad (b_0, b_1 \in \mathbb{C};\ b_0^2 \neq 4).$$

Wir verwenden im folgenden die Familie

$$f_{a_0,a_1}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^3z + a_0x^2y^2 + a_1x^2y^3 \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C};\ a_0(a_0-1) \neq 0).$$

Die Singularitäten beider Familien sind semiquasihomogen vom Typ (3,2,4;10).

Lemma:

Jede Singularität der Familie f'_{b_0,b_1} ist rechtsäquivalent zu einer Singularität aus der Familie f_{a_0,a_1} und umgekehrt.

Beweis:
Sei λ eine Wurzel des Polynoms $\lambda^2 + \lambda b_0 + 1 = 0$.
Die Substitution $z \longmapsto z + \lambda y^2$ überführt f'_{b_0,b_1} in

$$yz^2 + x^2z + \lambda x^2y^2 + (2\lambda + b_0)y^3z + h_1(x,y,z)\ ,$$

wobei h_1 quasihomogen vom Grad 12 ist und $2\lambda + b_0 \neq 0$.
Sei $\gamma^{-10} = 2\lambda + b_0$. Dann überführt der Koordinatenwechsel

$$x \longmapsto \gamma x\ ,\ y \longmapsto \gamma^4 y\ ,\ z \longmapsto \gamma^{-2} z$$

die gegebene Funktion in $g + h_2$ mit

$$g(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^3z + a_0x^2y^2\ .$$

Dabei ist h_2 quasihomogen vom Grad 12 und

$$a_0 = \lambda/(2\lambda+b_0) = \lambda^2/(\lambda^2-1)\ ,\ \text{also}\ \ a_0(a_0-1)b_0^2 = (1-2a_0)^2\ .$$

Insbesondere ist $a_0(a_0-1) \neq 0$.
Der Funktionskeim $g + h_2$ ist nach dem in I.1.4 zitiertem Resultat von Arnold rechtsäquivalent zu einer Singularität der Familie f_{a_0,a_1}. Die Umkehrung folgt analog. □

Bemerkung: $f_{a_0,0} \underset{R}{\sim} f_{1-a_0,0}$.

Das Poincarépolynom ist:
$\chi(t) = t^{12} + t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 + 2t^6 + t^5 + 2t^4 + t^3 + t^2 + 1$.

V_j bezeichne die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ $(3,2,4;j)$.

j	V_j
0	1
2	y
3	x

j	V_j
4	y^2, z
5	xy
6	x^2, yz, y^3

j	V_j
7	xy^2, xz
8	x^2y, y^4, y^2z, z^2
9	x^3, xy^3, xyz

j	V_j
10	$x^2y^2, y^5, x^2z, y^3z, yz^2$

j	V_j
12	$x^4, x^2y^3, y^6, x^2yz, y^4z, y^2z^2, z^3$

Lemma:

(i) Die Monome

$$\{x^ky^\ell \ (1 \leq k \leq 2, 0 \leq \ell \leq 3), y^kz^\ell \ (0 \leq k \leq 2, 0 \leq \ell \leq 1)\}$$

repräsentieren für jedes $a_0 \in \mathbb{C}$ mit $a_0(a_0-1) \neq 0$ eine Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{a_0,0}$.

(ii) Die Monome

$$\{z^2, xz, y^kz \ (1\leq k\leq 2), x^2y^k \ (0\leq k\leq 3), xy^k \ (1\leq k\leq 3), y^k \ (2\leq k\leq 3)\}$$

repräsentieren für jedes $a_0 \in \mathbb{C}$ mit $a_0(a_0-1) \neq 0$ eine Basis von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{a_0,0}$. Die zugehörige transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5.

□

S_{16}:

Wir verwenden die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform

$$f_{a_0,a_1}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + xy^4 + a_0y^6 + a_1y^7 \quad (a_0,a_1 \in \mathbb{C}) .$$

Die Singularitäten sind semiquasihomogen vom Typ (5,3,7;17). Das Poincarépolynom ist

$$\chi(t) = t^{21} + t^{18} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^3 + 1 .$$

V_j bezeichne die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ (5,3,7;j).

j	V_j
0	1
3	y
5	x
6	y^2
7	z
8	xy

j	V_j
9	y^3
10	x^2, yz
11	xy^2
12	y^4, xz
13	x^2y, y^2z
14	xy^3, z^2

j	V_j
15	x^3, y^5, xyz
16	x^2y^2, y^3z
18	x^3y, y^6, xy^2z
21	x^3y^2, y^7, xy^3z, z^3

Lemma:

(i) Die Monome
$\{z, x^2y^k\ (0\leq k\leq 2), xy^k(0\leq k\leq 3), y^k\ (0\leq k\leq 7)\}$
repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{o,o}$.

(ii) Die Monome
$\{z^2, xz, yz, x^2y^k\ (0\leq k\leq 2), xy^k\ (1\leq k\leq 3), y^k\ (2\leq k\leq 7)\}$
repräsentieren eine Basis von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{o,o}$. Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5. □

S_{17}:

Die von Arnold [Ar 3] angegebene Normalform ist:

$$f'_{b_0,b_1}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^6 + b_0y^4z + b_1y^5z \quad (b_0,b_1 \in \mathbb{C}).$$

Wir verwenden im folgenden die Familie

$$f_{a_0,a_1}(x,y,z) = yz^2 + x^2z + y^6 + a_0x^2y^3 + a_1x^2y^4 \quad (a_0,a_1 \in \mathbb{C}).$$

Die Singularitäten beider Familien sind semiquasihomogen vom Typ (7,4,10;24). Mit Folgerung 6.7 aus [Ar 2] und dem Lemma aus I.1.4.1 folgt leicht:

$$f_{1,0} \underset{K}{\sim} f'_{1,0} \quad \text{und} \quad f_{0,1} \underset{K}{\sim} f'_{0,1}.$$

Das Poincarépolynom ist:

$$\chi(t) = t^{30} + t^{26} + t^{23} + t^{22} + t^{20} + t^{19} + t^{18} + t^{16} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^8 + t^7 + t^4 + 1.$$

Es bezeichne V_j die Menge der Monome vom quasihomogenen Typ (7,4,10;j).

j	V_j
0	1
4	y
7	x
8	y^2
10	z

j	V_j
11	xy
12	y^3
14	x^2, yz
15	xy^2
16	y^4

j	V_j
18	x^2y, y^2z
19	xy^3
20	y^5, z^2
22	x^2y^2, y^3z
23	xy^4

j	V_j
26	x^2y^3, y^4z
30	x^2y^4, y^5z, z^3

Lemma:

(i) Die Monome
$\{z, x^2y^k\ (0\le k\le 4), xy^k\ (0\le k\le 4), y^k\ (0\le k\le 5)\}$
repräsentieren eine Basis von $\mathcal{O}/\Delta f_{o,o}$.

(ii) Die Monome
$\{z^2, xz, yz, x^2y^k\ (0\le k\le 4), xy^k (1\le k\le 4), y^k (2\le k\le 5)\}$
repräsentieren eine Basis von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{o,o}$. Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5 .

$\square$

Im folgenden sei $\mathcal{F} : \mathbb{C}^{22} \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$ die Familie:

$\mathcal{F}(t) :=$

$$t_{300}x^3 + \sum_{0\le k\le 4} t_{2k0}\,x^2y^k + \sum_{1\le k\le 4} t_{1k0}\,xy^k + \sum_{2\le k\le 7} t_{070}\,y^k$$
$$+ x^2z + \sum_{0\le k\le 1} t_{1k1}\,xy^kz + \sum_{1\le k\le 3} t_{0k1}\,y^kz$$
$$+ (t_{002}+y)z^2$$

$\mathcal{F}$ definiert für die für $S_{1,0}$, S_{16} und S_{17} genannten Familien f_{a_0,a_1} (minimale) transversale Scheiben $\mathcal{T}: T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$, wenn wir die Parameter gemäß der folgenden Tabelle substituieren. $T = T^+ \oplus T^0 \oplus T^-$ bezeichne die durch die $\mathbb{C}^*$-Aktion induzierte Zerlegung des Parameterraumes der transversalen Scheibe.

	transversale Scheibe	minimale trans. Scheibe, zusätzl. Bedingungen	Parameter für T^- (T^0)
$S_{1,0}$	$t_{050}=t_{060}=0$ $t_{070}=t_{140}=0$ $t_{240}=0$ $t_{031}=1$ $t_{220}=a+t'_{220}$	$t_{300}=t_{111}=0$ $t_{040}=0$	t_{230} (t'_{220})
S_{16}	$t_{230}=t_{240}=0$ $t_{140}=1$	$t_{300}=t_{111}=0$ $t_{021}=t_{031}=0$	t_{060} t_{070}
S_{17}	$t_{070}=0$ $t_{060}=1$	$t_{300}=t_{111}=0$ $t_{021}=t_{031}=0$	t_{230} t_{240}

Um die Vereinfachungen in Klassen vom Korang zwei zu untersuchen, machen wir den Ansatz

$$F(t) = (ax + by + cz)^2 \bmod m^3(3) \quad \text{mit} \quad (a,b,c) \neq 0 .$$

Lemma:

Ist $c = 0$ und $(a,b) \neq 0$ und hat $F(t)$ eine isolierte Singularität in 0, so ist $F(t)$ eine einfache Singularität.

Beweis: Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so ist

$$F(t) = by^2 + g(x,y,z)\cdot y + t_{300}x^3 + x^2z \bmod m^4(3)$$

mit $g \in m^2(3)$.

Mit dem in [Si 1], (3.2) beschriebenen Verfahren folgt:

$$F(t) \underset{R}{\sim} by^2 + t_{300}x^3 + x^2z + h(x,z)\ , \quad h \in m^4(2).$$

Aus der Arnoldschen Bestimmungstabelle ([Ar 3], § 14, Theoreme 3, 4, 5) ergibt sich:

$$t_{300}x^3 + x^2z + h(x,z) \in D_k \quad (k \geq 4)\ .$$

Ist $a \neq 0$, so machen wir zunächst eine Koordinatenwechsel

$$x \longmapsto x - \frac{b}{a}y\ , \quad y \longmapsto y$$

und erhalten:

$$F(t) \underset{R}{\sim} ax^2 + g(x,y,z)\cdot x + \alpha y^3 + \beta y^2z + yz^2 \bmod m^4(3)$$

mit $g \in m^2(3)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Analog zum ersten Fall folgt:

$$F(t) \in D_k \ (k \geq 4)\ .$$

$\square$

Wir könne daher im folgenden voraussetzen, daß

$$F(t) = (ax + by + cz)^2 \bmod m^3(3) \quad \text{mit} \quad c \neq 0\ ,$$

d.h., daß die Ungleichung

$$t_{002} \neq 0$$

und die sechs Gleichungen

$$t_{200} = a^2\ , \qquad t_{110} = 2ab\ , \qquad t_{020} = b^2\ ,$$
$$t_{101} = 2ac\ , \qquad t_{011} = 2bc\ , \qquad t_{002} = c^2\ ,$$

erfüllt sind.

Nach dem Lemma aus IV.3.2.1 ist dann

$$\mathcal{F}(t) \underset{K}{\sim} z^2 + \Delta_z\mathcal{F}(t)(x,y)$$

mit

$$\Delta_z\mathcal{F}(t) = \sum d_{k\ell}x^k y^\ell =:$$

$$\begin{aligned}
&4(c^2+y)\{(ax+by)^2 + t_{300}x^3 + \sum_{1\le k\le 4} t_{2k0}x^2y^k + \sum_{2\le k\le 4} t_{1k0}xy^k \\
&\qquad + \sum_{3\le k\le 7} t_{0k0}y^k\} \\
&- \{2c(ax+by) + x^2 + t_{111}xy + t_{021}y^2 + t_{031}y^3\}^2 \\
&= 4(c^2t_{300} - ac)x^3 \\
&+4(c^2t_{210} + a^2 - act_{111} - bc)x^2y \\
&+4(c^2t_{120} + 2ab - act_{021} - bct_{111})xy^2 \\
&+4(c^2t_{030} + b^2 - bct_{021})y^3 \\
&- x^4 \\
&+(4t_{300} - 2t_{111})x^3y \\
&+(4c^2t_{220} + 4t_{210} - 2t_{021} - t_{111}^2)x^2y^2 \\
&+(4c^2t_{130} + 4t_{120} - 4act_{031} - 2t_{111}t_{021})xy^3 \\
&+(4c^2t_{040} + 4t_{030} - 4bct_{031} - t_{021}^2)y^4 \\
&+(4c^2t_{230} + 4t_{220} - 2t_{031})x^2y^3 \\
&+(4c^2t_{140} + 4t_{130} - 2t_{111}t_{031})xy^4 \\
&+(4c^2t_{050} + 4t_{040} - 2t_{021}t_{031})y^5 \\
&+(4c^2t_{240} + 4t_{230})x^2y^4 \\
&+ 4t_{140}xy^5 \\
&+(4c^2t_{060} + 4t_{050} - t_{031}^2)y^6 \\
&+ 4t_{240}x^2y^5 \\
&+(4c^2t_{070} + 4t_{060})y^7 \\
&+ 4t_{070}y^8
\end{aligned}$$

V.2.5.2 Untersuchung $S \longrightarrow E$

2.5.2.1 Aufstellen der Gleichungen

Ist $\Delta_z F(t)$ eine Singularität der Gruppierung E, so muß der 3-Jet die Gestalt $(\alpha x + \beta y)^3$ mit $(\alpha,\beta) \neq 0$ haben. Ist $\alpha = 0$, so folgt, da -1 der Koeffizient vor x^4 ist, nach [Ar 3], § 14, Theoreme 6_1 und 7_1, daß eine E_6-Singularität vorliegt. Wir setzen daher

$$\Delta_z F(t) = d_{30}(x - Ay)^3 \bmod \mathfrak{m}^4(2) \quad \text{mit} \quad \underline{d_{30} \neq 0}$$

voraus.

Wir substituieren $x \longmapsto x + Ay$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum d_{k\ell}^{(1)} x^k y^\ell$$

beschrieben. Obiger Ansatz für den Tangentialkegel ist äquivalent zu

I
$$d_{00}^{(1)} = 0$$
$$d_{00}^{(1)} = d_{03} + Ad_{12} + A^2 d_{21} + A^3 d_{30}$$
$$0 = 4c^2(t_{030} + At_{120} + A^2 t_{210} + A^3 t_{300}) + 4(Aa+b)^2 - 4c(Aa+b)(A^2 + At_{111} + t_{021})$$

II
$$d_{10}^{(1)} = 0$$
$$d_{10}^{(1)} = d_{12} + 2Ad_{21} + 3A^2 d_{30}$$
$$0 = 4c^2(t_{120} + 2At_{210} + 3A^2 t_{300}) + 8a(Aa+b) - 4ac(A^2 + At_{111} + t_{021}) - 4c(Aa+b)(2A + t_{111})$$

III
$$d_{20}^{(1)} = 0$$
$$d_{20}^{(1)} = d_{21} + 3Ad_{30}$$
$$0 = 4c^2(t_{210} + 3At_{300}) + 4a^2 - 4c(Aa+b) - 4ac(2A + t_{111})$$
$$\underline{d_{30}^{(1)} = d_{30} = 4(c^2 t_{300} - ac) \neq 0}$$

Im folgenden verwenden wir die Notationen:

$$Y_1 := 2\frac{a}{c}A + 2\frac{b}{c} - A^2 - At_{1\,1\,1} - t_{0\,2\,1}$$
$$Y_2 := \frac{\partial Y_1}{\partial A} = 2\frac{a}{c} - 2A - t_{1\,1\,1}$$
$$X := t_{0\,3\,1} + c^{-2}Y_1$$

Damit eine von $T_{2\,3\,6}$ verschiedene Klasse der Gruppierung E vorliegt, muß gelten:

$$\sum_{k+\ell\leq 3} d^{(1)}_{k\,\ell}\, x^k y^\ell = d_{3\,0}(x - B_1 y)^2 (x - B_2 y)\,.$$

Wir erhalten als weitere Bedingungen:

IV $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$$d^{(1)}_{0\,1} = d_{0\,4} + Ad_{1\,3} + A^2 d_{2\,2} + A^3 d_{3\,1} + A^4 d_{4\,0}$$
$$0 = 4c^2(t_{0\,4\,0} + At_{1\,3\,0} + A^2 t_{2\,2\,0})$$
$$+ 4(t_{0\,3\,0} + At_{1\,2\,0} + A^2 t_{2\,1\,0} + A^3 t_{3\,0\,0})$$
$$- 4c(Aa + b)t_{0\,3\,1} - (A^2 + At_{1\,1\,1} + t_{0\,2\,1})^2$$

Da $c \neq 0$ folgt mit I:

$$0 = 4c^2(t_{0\,4\,0} + At_{1\,3\,0} + A^2 t_{2\,2\,0}) - Y_1^2 - 4c(Aa + b)t_{0\,3\,1}$$

V $\quad d^{(1)}_{1\,1} = 0$

$$d^{(1)}_{1\,1} = \frac{\partial}{\partial A} d^{(1)}_{0\,1} = d_{1\,3} + 2Ad_{2\,2} + 3A^2 d_{3\,1} + 4A^3 d_{4\,0}$$

Mit II folgt:

$$0 = 4c^2(t_{1\,3\,0} + 2At_{2\,2\,0}) - 2Y_1Y_2 - 4act_{0\,3\,1}$$

VI $\quad d^{(1)}_{0\,2} = 0$

$$d^{(1)}_{0\,2} = d_{0\,5} + Ad_{1\,4} + A^2 d_{2\,3}$$

Mit IV folgt:

$$0 = 4c^2(t_{0\,5\,0} + At_{1\,4\,0} + A^2 t_{2\,3\,0}) + c^{-2}Y_1^2 + 2Y_1 t_{0\,3\,1}$$

VII $\quad d^{(1)}_{2\,1} = -d_{3\,0}(2B_1 + B_2)$

$$d^{(1)}_{2\,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}\cdot d^{(1)}_{0\,1} = d_{2\,2} + 3Ad_{3\,1} + 6A^2 d_{4\,0}$$

Mit IV folgt

$$-d_{3\,0}(2B_1 + B_2) = 4c^2 t_{2\,2\,0} - Y_2^2 + 2Y_1$$

VIII $d^{(1)}_{1\,2} = d_{3\,0}(B_1 + 2B_2)B_1$

$d^{(1)}_{1\,2} = \frac{\partial}{\partial A} d^{(1)}_{0\,2} = d_{1\,4} + 2Ad_{2\,3}$

Mit V folgt:

$$d_{3\,0}(B_1 + 2B_2)B_1 = 4c^2(t_{1\,4\,0} + 2At_{2\,3\,0}) + 2XY_2$$

IX $d^{(1)}_{0\,3} = -d_{3\,0}B_1^2B_2$

$d^{(1)}_{0\,3} = d_{0\,6} + Ad_{1\,4} + A^2d_{2\,4}$

Mit VI folgt:

$$-d_{3\,0}B_1^2B_2 = 4c^2(t_{0\,6\,0} + A^2t_{2\,4\,0}) - X^2$$

$\underline{S \longrightarrow T_{2\,3\,r}}$ $(r \geq 7)$:

$\underline{T_{2\,3\,7}}$: Die Ungleichungen

$$c \neq 0, \quad d_{3\,0} \neq 0, \quad B_1 \neq B_2,$$

müssen gemeinsam mit den Gleichungen I - IX und den sechs Gleichungen für den Korangansatz erfüllt sein.

Wir substituieren $x \longmapsto x + B_1y$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d^{(2)}_{k\,\ell}x^ky^\ell \quad \text{mit} \quad d^{(2)}_{0\,0} = d^{(2)}_{1\,0} = 0\,, \quad d^{(2)}_{2\,0} = d_{3\,0}(B_1 - B_2) \neq 0$$

beschrieben.

Wir erhalten als notwendige Bedingung für

$\underline{T_{2\,3\,8}}$:

X $d^{(2)}_{0\,1} = 0$

$$d^{(2)}_{0\,1} = (d_{0\,7} + A^2d_{2\,5}) + B_1(d_{1\,5} + 2Ad_{2\,4}) + B_1^2d_{2\,3} + B_1^3(d_{3\,1} - 4A)$$

Mit den Gleichungen IX, VIII, VII und

$4t_{3\,0\,0} = 4\frac{a}{c} + c^{-2}d_{3\,0}$ folgt:

$$0 = 4c^2(t_{0\,7\,0} + 2B_1At_{2\,4\,0} + B_1^2t_{2\,3\,0})$$
$$c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1Y_2 - c^{-2}X)^2 - c^2B_1^4$$

$\underline{T_{2\,3\,9}}$: Der Tangentialkegel muß durch eine Gleichung

$$d_{3\,0}(B_1 - B_2)(x - Cy)^2$$

beschrieben werden. Wir erhalten die zusätzlichen Bedingungen:

XI $\quad d^{(2)}_{1\,1} = -2d_{3\,0}(B_1 - B_2)C$

$$d^{(2)}_{1\,1} = \frac{\partial}{\partial B_1} d^{(2)}_{0\,1} = (d_{1\,5} + 2Ad_{2\,4}) + 2B_1 d_{2\,3} + 3B_1^2(d_{3\,1} - 4A)$$

Wie bei X folgt:

$$-2d_{3\,0}(B_1 - B_2)C = 4c^2(2At_{2\,4\,0} + 2B_1 t_{2\,3\,0}) + 2c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1 Y_2 - c^{-2}X)(2B_1 + c^{-2}Y_2) - 4c^2B_1^3$$

XII $\quad d^{(2)}_{0\,2} = d_{3\,0}(B_1 - B_2)C^2$

$$d^{(2)}_{0\,2} = d_{0\,8} + B_1(2Ad_{2\,5}) + B_1^2 d_{2\,4} - B_1^4$$

$$d_{3\,0}(B_1 - B_2)C^2 = 4c^2B_1^2 t_{2\,4\,0} + 4(t_{0\,7\,0} + 2B_1 At_{2\,4\,0} + B_1^2 t_{2\,3\,0}) - B_1^4$$

Wir substituieren schließlich $x \longmapsto x + Cy$ und führen einen σ-Prozeß aus. Das strikte Urbild wird durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d^{(3)}_{k\,\ell} x^k y^\ell \quad \text{mit} \quad d^{(3)}_{0\,0} = d^{(3)}_{1\,0} = 0\,, \quad d^{(3)}_{2\,0} = d_{3\,0}(B_1 - B_2) \neq 0$$

beschrieben. Wir erhalten als notwendige Bedingung für

$\underline{T_{2\,3\,10}}$:

XIII $\quad d^{(3)}_{0\,1} = 0$

$$d^{(3)}_{0\,1} = B_1^2 d_{2\,5} + C(2Ad_{2\,5} + 2B_1 d_{2\,4} - 4B_1^3) + C^2(d_{2\,3} + 3B_1(d_{3\,1} - 4A)) + C^3 d_{3\,0}$$

$$0 = 4c^2(2CB_1 t_{2\,4\,0} + C^2 t_{2\,3\,0}) + 4((B_1^2 + 2AC)t_{2\,4\,0} + 2B_1 t_{2\,3\,0}) - 4CB_1^3 + C^2(6B_1 Y_2 + c^{-2}Y_2^2 - 2X) + c^{-2}d_{3\,0}(B_1 - B_2)^2 + C^3 d_{3\,0}$$

$\underline{S \longrightarrow E_\mu}$ $(\mu = 12, 13)$:

$\underline{E_{12}}$: Die sechs Gleichungen für den Korang und die Gleichungen I - IX müssen gelten mit

$$c^2 \neq 0\,, \quad d_{3\,0} \neq 0 \quad \text{und} \quad B_1 = B_2\,.$$

$\underline{E_{13}}$: Mit den Bezeichnungen aus "$S \longrightarrow T_{2\,3\,r}$" muß gelten:

X $\quad d^{(2)}_{0\,1} = 0$

$$0 = 4c^2(t_{0\,7\,0} + 2B_1 A t_{2\,4\,0} + B_1^2 t_{2\,3\,0})$$
$$+ c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1 Y_2 - c^{-2}X)^2 - c^2 B_1^4$$

2.5.2.2 Analyse der Gleichungen

$\underline{S_{1,0}}$: Für jede quasihomogene Singularität in der Normalform

$$f_{a_0,0}(x,y,z) = yz^2 + x^2 z + y^3 z + a_0 x^2 y^2$$

$$(a_0 \in H := \{a_0 \in \mathbb{C} \mid a_0(a_0 - 1) \neq 0\})$$

erhalten wir eine transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$, wenn wir in der Familie $\mathcal{F}(t)$ die Parameter wie folgt setzen:

$$t_{0\,3\,1} = 1\,,\; t_{0\,5\,0} = t_{0\,6\,0} = t_{0\,7\,0} = t_{1\,4\,0} = t_{2\,4\,0} = 0\,.$$

Eine minimale gute transversale Scheibe erhalten wir, wenn zusätzlich setzen:

$$t_{3\,0\,0} = t_{1\,1\,1} = t_{0\,4\,0} = 0\,.$$

Es genügt für jede quasihomogene Singularität der Normalform das T^+-Stratum zu untersuchen. Wir setzen daher

$$t'_{2\,2\,0} = 0 \text{ (also } t_{2\,2\,0} = a_0),\; t_{2\,3\,0} = 0\,.$$

<u>Untersuchung für $S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,8}$, $S_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12}$, $S_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{13}$</u>

Wir zeigen:

$$f_{a_0,0} \xrightarrow[\mu]{} E_{13} \iff a_0 \in \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\}.$$

In der minimalen guten transversalen Scheibe bestehen die Mengen

$$\{t \in T^+ \mid \mathcal{T}(t) \in T_{2\,3\,8}\} \text{ und } \{t \in T^+ \mid \mathcal{T}(t) \in E_{12}\}$$

für $a_0 \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ aus einem $\mathbb{C}^*$-Orbit und für $a_0 \in H - \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ aus zwei $\mathbb{C}^*$-Orbits.

<u>Beweis</u>: Die Parameter seien wir für die minimale gute transversale Scheibe von $f_{a_0,0}$ angegeben gesetzt.

Dann sind die Ungleichungen

$$c \neq 0\ ,\ d_{3\,0} = 4c^2 t_{3\,0\,0} + 4\frac{a}{c} = 4\frac{a}{c} \neq 0\ ,\ B_1 \neq B_2\ ,$$

die sechs Gleichungen für den Korangansatz und die Gleichungen I - X notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $t \in T^+$ $\mathcal{T}(t)$ zu einer Klasse $T_{2\,3\,r}$ $(r \geq 8)$ gehört. Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:

$$\text{nicht}(\ S_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,9}\ )\ .$$

Also sind die genannnten Bedingungen sogar notwendig und hinreichend dafür, daß eine $T_{2\,3\,8}$ - Singularität vorliegt.

Da $\mu(S_{1,0}) = 14$, sind die Bedingungen

$$c \neq 0\ ,\ d_{3\,0} \neq 0\ ,\ \underline{B_1 = B_2}\ ,$$

die sechs Bedingungen für den Korangansatz und die Gleichungen I - IX notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $t \in T^+$ $\mathcal{T}(t) \in E_{12}$ oder $\mathcal{T}(t) \in E_{13}$ gilt. Dabei ist $\mathcal{T}(t) \in E_{13}$ genau dann, wenn zusätzlich die Gleichung X erfüllt ist.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen:

VI $\quad (c^{-2}Y_1 + 2)Y_1 = 0$

VII $\quad 4c^2 a_o - Y_2^2 + 2Y_1 = -d_{3\,0}(2B_1 + B_2)$

VIII $\quad 2XY_2 = d_{3\,0}(B_1 + 2B_2)B_1$

IX $\quad -X^2 = -d_{3\,0}B_1^2 B_2$

und für E_{13} bzw. $T_{2\,3\,8}$ zusätzlich

X $\quad c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1Y_2 - c^{-2}X)^2 - c^2B_1^4 = 0$

Aus VI folgt entweder

$$Y_1 = 0\ ,\ \text{also}\ X = 1 + c^{-2}Y_1 = 1$$

oder

$$Y_1 = -2c^2,\ \text{also}\ X = 1 + c^{-2}Y_1 = -1\ .$$

Aus IX folgt, daß für jede Lösung der Gleichungen gelten muß:

$$c \neq 0\ ,\ d_{3\,0} \neq 0\ ,\ B_1 \neq 0\ ,\ B_2 \neq 0\ ,$$

(1) $\quad d_{3\,0} = (B_1^2 B_2)^{-1}\ .$ $\qquad$ [IX]

(2) $\quad Y_2 = \frac{1}{2}X(B_1 + 2B_2)B_1^{-1}B_2^{-1}$ $\qquad$ [VIII]

Fall a): $S_{1,0} \longrightarrow T_{2\,3\,8}, E_{13}$

(3) $\quad X - B_1Y_2 = (1+\varepsilon)c^2B_1^2 \quad (\varepsilon = \pm 1)$ [X]

(4) $\quad -\frac{1}{2}XB_1/B_2 = (1+\varepsilon)c^2B_1^2$ [2]

$\varepsilon = -1$ ist nicht zulässig, da $B_1 \neq 0$.

Wir erhalten

$$c^2 = -\frac{1}{4}(XB_1B_2)^{-1}$$

Mit $4c^2a_o + 2Y_1 = 4c^2(a_o + \frac{1}{2}(X-1))$ folgt aus VII:

(5) $\quad B_2 = -(4X(a_o - \frac{1}{2}(X+1)))^{-1}B_1 \quad$ für $a_o(a_o - 1) \neq 0$.

Für $a_o \in H$ erhalten wir also die folgenden Lösungen der Gleichungen VI - X:

$$B_2 = -(4X(a_o - \tfrac{1}{2}(X+1)))^{-1}B_1$$
$$d_{3\,0} = -4X(a_o - \tfrac{1}{2}(X+1))B_1^{-3}$$
$$c^2 = (a_o - \tfrac{1}{2}(X+1))B_1^{-2}$$
$$Y_1 = (X-1)(a_o - \tfrac{1}{2}(X+1))B_1^{-2}$$
$$Y_2 = -(2a_o - 2X - 1)B_1^{-1}$$

mit $X = \pm 1$ und $B_1 \in \mathbb{C}^*$.

Falls $X = 1$, so gilt $B_1 = B_2 \iff a_o = \frac{3}{4}$.

Falls $X = -1$, so gilt $B_1 = B_2 \iff a_o = \frac{1}{4}$.

Fall b): $S_{1,0} \longrightarrow E_{12}, E_{13}$

Wir setzen $B_2 = B_1$. Aus VII folgt:

$$c^2 = -\frac{3}{16}(a_o + \tfrac{1}{2}(X-1))^{-1}B_1^{-2}$$

Setzen wir dies in die Gleichung X ein, so folgt entweder

$$X = B_1Y_2, \text{ also } \pm 1 = \pm\frac{3}{2} \;\lightning$$

oder

$$X - B_1Y_2 = 2c^2B_1^2, \text{ also } a_o + \tfrac{1}{2}(X-1) = \tfrac{3}{4}X.$$

Die Gleichungen VI - IX mit $B_1 = B_2$ haben also die Lösungen:

$$d_{3\,0} = B_1^{-1}$$
$$Y_2 = \tfrac{3}{2}XB_1^{-1}$$
$$c^2 = -\tfrac{3}{16}(a_o + \tfrac{1}{2}(X-1))^{-1}B_1^{-2}$$
$$Y_1 = \tfrac{-3}{16}(X-1)(a_o + \tfrac{1}{2}(X-1))^{-1}B_1^{-2}$$

mit $X = \pm 1$, $B_1 \in \mathbb{C}^*$.

Für $X = 1$ ist die Gleichung X genau dann erfüllt, wenn $a_o = \frac{3}{4}$.

Für $X = -1$ ist die Gleichung X genau dann erfüllt, wenn $a_o = \frac{1}{4}$.

Für festes $a_o \in H$, $X \in \{\pm 1\}$ und $B_1 \in \mathbb{C}^*$ erhalten wir in den Fällen a) und b) Lösungen $Y_1, Y_2, d_{3\,0}, c^2, B_2$, die eindeutig einen Parameter $t \in T^+$ definieren, für den entsprechend den Berechnungen in den Fällen a) und b) gilt $\overline{T}(t) \in T_{2\,3\,8}$, $\overline{T}(t) \in E_{12}$ bzw. $\overline{T}(t) \in E_{13}$:
Da $4a/c = d_{3\,0}$, ist a/c bestimmt.
Da $t_{1\,1\,1} = 0$, ergibt sich A aus der Definition von Y_2.
Die Gleichung V läßt sich eindeutig nach $t_{1\,3\,0}$ und die Gleichung IV (da $t_{0\,4\,0} = 0$) nach b/c auflösen.
$t_{0\,2\,1}$ ist durch die Definition von Y_2 bestimmt.
Die übrigen neun Parameter $t_{k\,\ell\,m}$ ergeben sich eindeutig aus den Gleichungen III, II und I sowie den sechs Gleichungen für den Korang.
Die so erhaltenen Parameter $t \in T^+$ ergeben für variierendes $B_1 \in \mathbb{C}^*$ offenbar ein $\mathbb{C}^*$-Orbit.

Ist andererseits ein $t \in T^+$ gegeben, für das die algebraischen Bedingungen in Fall a) bzw. b) lösbar sind, so sind die zu einer Lösung gehörenden Parameter c^2, a/c, b/c, $d_{3\,0}$ und A durch t eindeutig bestimmt. Dann ist auch $X = \pm 1$ durch t eindeutig bestimmt. Zu $X = 1$ und $X = -1$ gehören in den Fällen a) bzw. b) also verschiedene $\mathbb{C}^*$-Orbits.

□

<u>Bemerkung</u>: Für die nicht-minimale transversale Scheibe definieren im Fall a) die Lösungen mit $X = 1$, $s := -B_1^{-1}$ und $A = a = b = t_{0\,2\,1} = 0$ die stetige Familie

$$((a_o - 1)s^2 + y)z^2 + (x^2 + (3 - 2a_o)sxy + y^3)z + a_o x^2 y^2 + sx^3$$

und im Fall b) die Lösungen mit $X = 1$, $s := -\frac{4}{3}B_1^{-1}$ und $A = a = b = t_{0\,2\,1} = 0$ die stetige Familie

$$(-\tfrac{1}{3}a_o s^2 + y)z^2 + (x^2 + 2a_o sxy + y^3)z + a_o x^2 y^2 + \tfrac{16}{9}a_o^2 sx^3 .$$

<u>S_{17}:</u> Setzen wir

$$t_{070}=0,\ t_{060}=1,$$

so definiert $\mathcal{F}(t)$ eine transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow m^2(n)$ der quasihomogenen Singularität $yz^2+x^2z+y^6$ von S_{17}. Es genügt, das T^+-Stratum von $\mathcal{T}$ zu untersuchen. Wir setzen daher:

$$t_{230}=0,\ t_{240}=0.$$

<u>$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,10}$</u>

<u>Beweis:</u> Sind die Parameter wie für das T^+-Stratum angegeben gestzt, so sind die Ungleichungen

$$c^2 \neq 0,\ d_{30} \neq 0,\ B_1 \neq B_2,$$

die sechs Gleichungen für den Korang sowie die Gleichungen I - XIII notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $t \in T^+$ $\mathcal{T}(t)$ zu einer Klasse $T_{2\,3\,r}$ $(r \geq 10)$ gehört. Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:

$$\text{nicht}(S_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2\,3\,11}).$$

Also sind die genannten Bedingungen sogar notwendig und hinreichend dafür, daß eine $T_{2\,3\,10}$-Singularität vorliegt.
Aus den Gleichungen I - VIII lassen sich leicht die acht Parameter $t_{030}, t_{120}, t_{210}, t_{040}, t_{130}, t_{050}, t_{220}$ und t_{140} eliminieren. Es verbleiben die Gleichungen:

IX $\quad 4c^2 - X^2 = -d_{30}B_1^2B_2$

X $\quad c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1Y_2 - c^{-2}X)^2 = c^2B_1^4$

XI $\quad 2c^2(B_1^2 + c^{-2}B_1Y_2 - c^{-2}X)(2B_1 + c^{-2}Y_2) - 4c^2B_1^3 = -2d_{30}(B_1-B_2)C$

XII $\quad -B_1^4 = c^2d_{30}(B_1 - B_2)$

XIII $\quad -4CB_1^3 + c^2(6B_1Y_2 + c^{-2}Y_2^2 - 2X) + c^{-2}d_{30}(B_1-B_2)c^2 + d_{30}c^3 = 0$

Aus den Gleichungen X, IX und XII folgt:

$$B_1 \neq 0,\ C \neq 0;\ d_{30} \neq 0,\ B_1 \neq B_2.$$

(Insbesondere sind also für jede Lösung die Ungleichungen $d_{30} \neq 0$ und $B_1 \neq B_2$ erfüllt.)

Substituieren wir:

$$d_{3\,0} =: -V^2, \quad B_1 - B_2 =: W^2,$$

so können wir o.B.d.A. XII durch

(1) $\quad c = B_1^2 V^{-1} W^{-1}$

ersetzen. Aus den anderen Gleichungen erhalten wir:

(2) $\quad 4c^2 - X^2 = V^2 B_1^2 (B_1 - W^2)$

(3) $\quad (B_1^2 + c^{-2} B_1 Y_2 - c^{-2} X)^2 = B_1^4$

(4) $\quad (B_1^2 + c^{-2} B_1 Y_2 - c^{-2} X)(2B_1 + c^{-2} Y_2) - 2B_1^3 = c^{-2} VWB_1^2$

(5) $\quad -4B_1^3 + B_1^2 V^{-1} W^{-1} (6B_1 Y_2 + c^{-2} Y_2^2 - 2X) - c^{-2} VWB_1^2 - W^{-2} B_1^4 = 0$

Aus (3) folgt entweder

(6) $\quad B_1 Y_2 - X = -2c^2 B_1^2 \qquad$ oder $\quad B_1 Y_2 - X = 0$.

Dann liefert (4):

(7) $\quad Y_2 = -4c^2 B_1 - VW \qquad$ oder $\quad Y_2 = VW$

(8) $\quad X = -2c^2 B_1^2 - VWB_1 \qquad$ oder $\quad X = VWB_1$.

Setzen wir (7) und (8) in $6B_1 Y_2 + c^{-2} Y_2^2 - 2X$ ein, so erhalten wir

$$-4c^2 B_1^2 + 4VWB_1 + c^{-2} V^2 W^2 \quad \text{oder} \quad 4VWB_1 + c^{-2} V^2 W^2$$

(5) liefert also:

(9) $\quad -4c^2 B_1^4 V^{-1} W^{-1} - W^{-2} B_1^4 = 0$ oder $\quad -W^{-2} B_1^4 = 0$.

Im zweiten Fall existiert also keine Lösung.

(10) $\quad V = -4c^2 W$

(11) $\quad X = -2c^{-2} B_1^2 + 4c^2 W^2 B_1$

Wenn wir dies in (2) einsetzen, ergibt sich:

(12) $\quad 4c^2 - 4c^4 B_1^4 = 0$

Die Lösungen des Gleichungssystemes sind also:

$c^2 = B_1^4, \qquad d_{3\,0} = -16(B_1 - B_2) B_1^{-8}, \qquad X = 2(B_1 - 2B_2) B_1^{-3},$

$Y_2 = -4B_2 B_1^{-4}, \qquad c = -1/4\, B_1^6 (B_1 - B_2)^{-1}$.

Mit den Sätzen 6 und 5 aus Kapitel IV.2.2 können wir schließen:

$$yz^2 + x^2 z + y^6 + x^2 y^3 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,10}, \quad \text{also} \quad S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,10}.$$

□

Bemerkung: Die Lösungen mit $t := 1/B_1$ und $B_2 = A = a = b = t_{0\,2\,1} = 0$ definieren die Familie

$$(t^4 + y)z^2 + (x^2 + 2t^2y^3)z - 4t(tx - y^2)^2x + y^6,$$

die die Vereinfachung nach $T_{2\,3\,10}$ beschreibt.

V.2.5.3 Untersuchung $S \longrightarrow Z, W$

2.5.3.1 Aufstellen der Gleichungen

Eine Singularität einer Klasse $T_{2\,q\,r} \subset \mathfrak{m}^4(2)$ $(q \geq 4, r \geq 5)$ ist das Produkt einer A_{q-3}- und einer A_{r-3}-Singularität.
Damit $\Delta_z F(t)$ zu einer Klasse $T_{2\,q\,r}$ $(q \geq 4, r \geq 5)$ gehört, muß gelten:

$$\Delta_z F(t) = -(x - A_1y)^2(x - A_2y)(x - A_3y) \bmod \mathfrak{m}^5(2),$$

wobei o.B.d.A. $(x - A_1y)^2$ den Tangentialkegel der A_{r-3}-Singularität beschreibe.
Dabei gehört $\Delta_z F(t)$ zu einer Klasse $T_{2\,4\,r}$ $(r \geq 5)$, wenn

$$A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$$

und zu einer Klasse $T_{2\,q\,r}$ $(q, r \geq 5)$, wenn

$$A_2 = A_3, \quad A_1 \neq A_2.$$

Wir führen zunächst einen Koordinatenwechsel $x \longmapsto x + A_1y$ aus. Die Bedingung, daß der 3-Jet verschwindet, liefert analog zu 2.5.2.1 die Gleichungen

I $\quad 0 = 4c^2(t_{0\,3\,0} + A_1t_{1\,2\,0} + A_1^2t_{2\,1\,0} + A_1^3t_{3\,0\,0})$
$\quad\quad +4(A_1a + b)^2 - 4c(A_1a + b)(A_1^2 + A_1t_{1\,1\,1} + t_{0\,2\,1})$

II $\quad 0 = 4c^2(t_{1\,2\,0} + 2A_1t_{2\,1\,0} + 3A_1^2t_{3\,0\,0}) + 8a(A_1a + b)$
$\quad\quad - 4ac(A_1^2 + A_1t_{1\,1\,1} + t_{0\,2\,1}) - 4c(A_1a + b)(2A_1 + t_{1\,1\,1})$

III $\quad 0 = 4c^2(t_{2\,1\,0} + 3A_1t_{3\,0\,0}) + 4a^2$
$\quad\quad - 4c(A_1a + b) - 4ac(2A_1 + t_{1\,1\,1})$

IV $\quad 0 = 4(c^2t_{3\,0\,0} - ac)$

Wir verwenden die Notationen:

$$Y_1 := 2\frac{a}{c}A_1 + 2\frac{b}{c} - A_1^2 - A_1 t_{1\,1\,1} - t_{0\,2\,1}$$

$$Y_2 := \frac{\partial}{\partial A_1} Y_1 = 2\frac{a}{c} - 2A_1 - t_{1\,1\,1}$$

$$X := t_{0\,3\,1} + c^{-2} Y_1$$

Nach einem σ - Prozeß wird das strikte Urbild durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d_{k\,\ell}^{(1)} x^k y^\ell$$

beschrieben. Aus dem Ansatz für den Tangentialkegel von $\Delta_z \mathcal{F}(t)$ ergeben sich die Bedingungen:

V $\quad d_{0\,0}^{(1)} = 0$

Mit I folgt:

$$0 = 4c^2(t_{0\,4\,0} + A_1 t_{1\,3\,0} + A_1^2 t_{2\,2\,0}) - Y_1^2 - 4c(A_1 a + b)t_{0\,3\,1}$$

VI $\quad d_{1\,0}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial A_1} d_{0\,0}^{(1)} = 0$

$$0 = 4c^2(t_{1\,3\,0} + 2A_1 t_{2\,2\,0}) - 2Y_1 Y_2 - 4act_{0\,3\,1}$$

VII $\quad d_{2\,0}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_1} d_{0\,0}^{(1)} = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$

$$-(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = 4c^2 t_{2\,2\,0} - Y_2^2 + 2Y_1$$

VIII $\quad d_{3\,0}^{(1)} = \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial A_1} d_{0\,0}^{(1)} = -((A_1 - A_2) + (A_1 - A_3))$

$$-((A_1 - A_2) + (A_1 - A_3)) = 2Y_2$$

Wir erhalten als zusätzliche Bedingung für:

$\underline{T_{2\,q\,6}\ (q \geq 4)}$:

IX $\quad d_{0\,1}^{(1)} = 0$

Mit V folgt:

$$0 = 4c^2(t_{0\,5\,0} + A_1 t_{1\,4\,0} + A_1^2 t_{2\,3\,0}) + c^{-2} Y_1^2 + 2Y_1 t_{0\,3\,1}$$

$\underline{T_{2\,q\,7}\ (q \geq 4)}$: Der Tangentialkegel muß durch eine Gleichung

$$-(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(x - By)^2$$

beschrieben werden. Wir erhalten als weitere Bedingungen

X $\quad d_{1\,1}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial A_1} d_{0\,1}^{(1)} = 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B$

$$2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B = 4c^2(t_{1\,4\,0} + 2A_1 t_{2\,3\,0}) + 2Y_2 X$$

XI $\quad d^{(1)}_{0\,2} = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B^2$

$$-(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B^2 = 4c^2(t_{0\,6\,0} + A_1^2 t_{2\,4\,0}) - X^2$$

Wir substituieren $x \longmapsto x + By$ und führen dann einen σ - Prozeß aus. Das strikte Urbild wird durch eine Kurvenfamilie

$$\sum d^{(2)}_{k\,\ell} x^k y^\ell \quad \text{mit} \quad d^{(2)}_{0\,0} = d^{(2)}_{1\,0} = 0\,, \quad d^{(2)}_{2\,0} = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$$

beschrieben. Wir erhalten als notwendige Bedingung für

<u>$T_{2\,q\,8}$ $(q \geq 4)$</u>:

XII $\quad d^{(2)}_{0\,1} = 0$

Mit XI, X, VII und IV folgt:

$$0 = 4c^2(t_{0\,7\,0} + 2BA_1 t_{2\,4\,0} + B^2 t_{2\,3\,0}) + c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)^2 - c^{-2}B^4$$

<u>$T_{2\,q\,9}$ $(q \geq 4)$</u>: Der Tangentialkegel muß die Gestalt

$$-(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(x - Cy)^2$$

haben. Wir erhalten die zusätzlichen Bedingungen:

XIII $\quad d^{(2)}_{1\,1} = \frac{\partial}{\partial B} d^{(2)}_{0\,1} = 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)C$

$$2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)C = 4c^2(2A_1 t_{2\,4\,0} + 2Bt_{2\,3\,0}) + 2c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)(2B + c^{-2}Y_2) - 4c^2B^3$$

XIV $\quad d^{(2)}_{0\,2} = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)C^2$

$$-(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)C^2 = 4c^2Bt_{2\,4\,0} + 4(t_{0\,7\,0} + 2BA_1 t_{2\,4\,0} + B^2 t_{2\,3\,0}) - B^4$$

2.5.3.2 Analyse der Gleichungen

S_{16}: Setzen wir $t_{140} = 1$, $t_{230} = t_{240} = 0$, so definiert $\mathcal{F}(t)$ eine transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow m^2(3)$ der quasihomogenen Singularität $yz^2 + x^2z + xy^4$ von S_{16}. Dabei ist $T^+ = \{t \in T \mid t_{060} = t_{070} = 0\}$. Wir setzen:

$$t_{070} = 0 .$$

$$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{249}$$

Beweis: Sind die Parameter wie angegeben gesetzt, so sind in einer genügend kleinen Umgebung $0 \in U \subset T$ die Ungleichungen

$$c \neq 0 , \; A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1 ,$$

die sechs Gleichungen für den Korangansatz sowie die Gleichungen I - XIV notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $t \in U$ $\mathcal{T}(t)$ zu einer Klasse T_{23r} $(r \geq 9)$ gehört. Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:

$$\text{nicht}(S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,4\,10}) .$$

Also sind die genannnten Bedingungen sogar notwendig und hinreichend dafür, daß eine T_{249}-Singularität vorliegt.

Die Gleichungen I - VII und IX können leicht nach den Unbestimmten t_{030}, t_{120}, t_{210}, t_{300}, t_{040}, t_{130}, t_{220}, t_{050} aufgelöst werden. Es verbleiben die Gleichungen:

VIII $\quad 2Y_2 = -((A_1 - A_2) + (A_1 - A_3))$

X $\quad 4c^2 + 2Y_2X = 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B$

XI $\quad 4c^2 t_{060} - X^2 = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)B^2$

XII $\quad c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)^2 - c^2B^4 = 0$

XIII $\quad 2c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)(2B + c^{-2}Y_2) - 4c^2B^3 = 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)c^2$

XIV $\quad -B^4 = -(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)c^2$

Da wir die Hilfsparameter A_2 und A_3 nicht explizit bestimmen müssen, genügt es, die Gleichungen X - XIV zu untersuchen. Wir substituieren:

$$d^2 := (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$$

Da für jede Lösung $c \neq 0$ gelten muß, folgt aus den Gleichungen X, XII, und XIV:

$$B \neq 0 \text{ und } d \neq 0 .$$

Wir können d so wählen, daß gilt:

(1) $C = B^2 d^{-1}$ [XIV] .

(2) $X - BY_2 = (1+\varepsilon)c^2B^2$, $\varepsilon = \pm 1$ [XII]

(3) $Y_2 = -\varepsilon d - 2(1+\varepsilon)c^2 B$ [XIII]

(4) $X = -\varepsilon dB - (1+\varepsilon)c^2B^2$ [2,3]

Wäre $\varepsilon = -1$, so ergäbe Gleichung X: $4c^2 = 0 .$ ↯

Wir betrachten daher nur noch den Fall $\varepsilon = 1$.

(5) $4c^2 + 12c^2dB^2 + 16c^4B^3 = 0$ [X]

(6) $4c^2 t_{060} - 4c^2dB^3 - 4c^4B^4 = 0$ [XI]

Wir erhalten die Lösungen

$c^2 = -B^{-3} - 3t_{060}B^{-4}$, $\qquad d = B^{-2} + 4t_{060}B^{-3}$,

$X = B^{-1} + 2t_{060}B^{-2}$, $\qquad Y_2 = 3B^{-2} + 8t_{060}B^{-3}$.

Wir setzen $s := B^{-1}$, $A_1 = a = b = t_{021} = 0$.

Für festen Parameter t_{060} ist dann jedem $s \in \mathbb{C}^*$ eine eindeutige, stetig von s abhängende Lösung zugeordnet. Für $s \longrightarrow 0$ streben die von t_{060} verschiedenen Parameter $t_{k\ell m}$ der Lösung gegen Null. Mit der Analyse der Gleichungen für nicht($S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{259}$) folgt für den so für hinreichend kleines $s \in \mathbb{C}^*$ definierten Parameter $t \in T$: $\overline{7}(t) \in T_{249}$.

Wir erhalten:

$$yz^2 + x^2z + xy^4 + a_oy^6 \xrightarrow[\mu]{} T_{249} \quad (a_o = t_{060} \neq 0 \text{ klein}) ,$$

also

$$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{249} .$$

□

<u>Bemerkung</u>: Die genannten Lösungen definieren die folgende, die Vereinfachung nach T_{249} beschreibende, stetige Familie:

$$(-(s^3 + 3a_os^4) + y)z^2 + (x^2 - (3s^2 + 8a_os^3)xy + (s + 2a_os^2)y^3)z$$
$$-2(s + 2a_os^2)x^2y^2 + xy^4 + a_oy^6 .$$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,5\,8}$

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie oben, wobei wir diesmal das Gleichungssystem

XIII $\quad 2Y_2 = -2(A_1 - A_2)$

X $\quad 4c^2 + 2Y_2X = 2(A_1 - A_2)^2B$

XI $\quad 4c^2t_{0\,6\,0} - X^2 = -(A_1 - A_2)^2B^2$

XII $\quad c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)^2 - c^2B^4 = 0$

zu untersuchen haben.

(1) $\quad X - BY_2 = (1+\varepsilon)c^2B^2\ , \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad$ [XII]

(2) $\quad 2c^2 = -(1+\varepsilon)c^2B^2Y_2 \qquad$ [X,VIII,1]

Für $\varepsilon = -1$ folgt $c^2 = 0$. ↯

Es sei also $\varepsilon = 1$. Dann folgt

$$B \neq 0, \quad Y_2 = -B^{-2} .$$

Wir erhalten die Lösungen:

$c^2 = B^{-3} + t_{0\,6\,0}B^{-4} \qquad$ [XI,VIII,1,2]

$Y_2 = -B^{-2}, \quad A_1 - A_2 = B^{-2}, \quad X = B^{-1} + 2t_{0\,6\,0}B^{-2}$.

Mit der Analyse der Gleichungen für nicht($S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,9}$) folgt:

$$yz^2 + x^2z + xy^4 + a_oy^6 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,5\,8} \quad (a_o \neq 0 \text{ klein}) ,$$

also

$$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,5\,8} .$$

□

Bemerkung: Wir erhalten die folgende stetige Familie:

$((t^3+a_ot^4) + y)z^2 + (x^2 + t^2xy + (t+2a_ot^2)y^3)z + xy^4 + a_oy^6$,

die die Vereinfachung nach $T_{2\,5\,8}$ beschreibt.

nicht($S_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,9}$)

Beweis: Da $\mu(T_{2\,5\,9}) = \mu(S_{16}) - 1$, kann es keine von S_{16} und $T_{2\,5\,9}$ verschiedene Arnoldsche Klasse Y mit

$$S_{16} \xrightarrow{\exists} Y \text{ und } Y \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,9} \text{ geben.}$$

Wir erhalten das T^+ - Stratum einer minimalen transversalen Scheibe von $yz^2+x^2z+xy^4$, wenn wir zusätzlich

$$t_{060}=t_{111}=t_{300}=t_{021}=t_{031}=0$$

setzen.

Nach Kapitel IV.2.2 ,Satz 3 , folgt die Behauptung, wenn es kein $t\in T^+$ mit $\mathcal{T}(t)\in T_{259}$ gibt.

Für solch ein t müssen die in "$S_{16}\xrightarrow{\forall}T_{249}$" genannten Bedingungen mit $A_2=A_3$ erfüllt sein. Aus der Rechnung in "$S_{16}\xrightarrow{\forall}T_{249}$" folgt, daß es dann ein $B\neq 0$ mit $Y_2=3B^{-2}$ gibt. Aus der Rechnung in "$S_{16}\xrightarrow{\forall}T_{258}$" folgt $Y_2=-B^{-2}$. ↯

$\square$

<u>S_{17}</u>: Setzen wir

$$t_{070}=1\ ,\ t_{080}=0\ ,$$

so definiert $\mathcal{F}(t)$ eine transversale Scheibe $\mathcal{T}:T\longrightarrow m^2(3)$ der quasihomogenen Singularität $yz^2+x^2z+y^6$ von S_{17}.

Es genügt, das T^+ - Stratum von $\mathcal{T}$ zu untersuchen. Wir setzen daher

$$t_{230}=t_{240}=0\ .$$

<u>$S_{17}\xrightarrow{\forall}T_{259}$</u>

<u>Beweis</u>: Nachdem die Parameter wie angegeben gesetzt sind, sind die Ungleichungen

$$c\neq 0\ ,\ A_1-A_2\neq 0\ ,$$

die sechs Gleichungen für den Korangansatz und die Gleichungen I - XIV mit $A_2=A_3$ notwendig und hinreichend dafür, daß für ein $t\in T^+$ $\mathcal{T}(t)$ zu einer Klasse T_{2qr} $(q\geq 5, r\geq 9)$ gehört.

Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:

$$\text{nicht}(S_{17}\xrightarrow{\exists}T_{2qr})\ \text{ für }\ q\geq 5,\ r\geq 9,\ q+r\geq 15\ .$$

Also sind die genannten Bedingungen sogar notwendig und hinreichend dafür, daß eine T_{259} - Singularität vorliegt.

In den Gleichungen I - VII, IX und X lassen sich leicht die neun Parameter t_{030}, t_{120}, t_{210}, t_{300}, t_{040}, t_{130}, t_{220}, t_{050} und t_{140} eliminieren. Es verbleiben die Gleichungen:

VIII	$2Y_2 = -2(A_1 - A_2)$
XI	$4c^2 - X^2 = -(A_1 - A_2)^2 B^2$
XII	$c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)^2 - c^2B^4 = 0$
XIII	$2c^2(B^2 + c^{-2}BY_2 - c^{-2}X)(2B + c^{-2}Y_2) - 4c^2B^3 = 2(A_1 - A_2)^2 C$
XIV	$-B^4 = -(A_1 - A_2)^2 C^2$

Aus den Gleichungen VIII, XI, XII und XIV folgt:

$$B \neq 0\,,\quad A_1 - A_2 \neq 0\,,\quad C \neq 0\,,\quad Y_2 \neq 0\,.$$

(1)	$Y_2 = -(A_1 - A_2)$	[VIII]
(2)	$C = \varepsilon_1 B^2 Y_2^{-1}\,, \quad \varepsilon_1 = \pm 1$	[XIV,1]
(3)	$X = BY_2 + (1+\varepsilon_2)c^2B^2\,, \quad \varepsilon_2 = \pm 1$	[XII]

Wäre $\varepsilon_2 = -1$, so ergäbe sich mit (1), (3) und XI: $4c^2 = 0$. $\lightning$

Sei also $\varepsilon_2 = 1$.

(4)	$-8c^2B^3 = 2(\varepsilon_1 + 1)B^2 Y_2$	[XIII]

Da die linke Seite von (4) nicht verschwindet, folgt $\varepsilon_1 = 1$. Wir erhalten:

(5)	$Y_2 = -2c^2B$	
(6)	$X = 0$	[3,5]
(7)	$4c^2 = -4c^4B^4$	[1,5,6,XI]

Die Lösungen sind also:

$$c^2 = -B^{-4}, \quad X = 0\,, \quad Y_2 = 2B^{-3}\,, \quad A_1 - A_2 = -2B^{-3}\,, \quad C = \tfrac{1}{2}B^5\,.$$

Mit den Sätzen 6 und 5 aus Kapitel IV.2.2 können wir schließen:

$$yz^2 + x^2z + y^6 + x^2y^3 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,5\,9}\,,$$

und damit

$$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2\,5\,9}\,.$$

□

<u>Bemerkung</u>: Die Lösungen mit $s = B^{-1}$, $A_1 = a = b = t_{0\,2\,1} = 0$ definieren die stetige Familie

$$(-s^4 + y)z^2 + (x^2 - 2s^3xy)z - 2sxy^4 + y^6\,.$$

V.2.6 Untersuchung für die Klassen U_{16} und $U_{1,0}$

Zum Beweis der Theoreme 1 und 2 in Kapitel III ist auf Grund der Ergebnisse aus der Untersuchung der Milnorgitter noch folgendes zu zeigen:

U_{16}: $\quad U_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,9} \quad ; \quad$ nicht $(U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,6})$

nicht $(U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{3\,3\,8})$

$U_{1,0}$: $\quad h_{a_o} = x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$, wobei $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$

$$h_{a_o} \underset{\mu}{\not\longrightarrow} T_{2\,5\,5}$$

$$h_{a_o} \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,3\,9} \quad \Longleftrightarrow \quad a_o^2 = \frac{1}{3}$$

$$h_{a_o} \xrightarrow[\mu]{} Z_{13} \quad \Longleftrightarrow \quad a_o^2 = -\frac{1}{9}$$

Diese Behauptungen werden im folgenden durch eine Analyse der Gleichungen bewiesen. Anschließend gehen wir in V.2.6.5 noch kurz auf Gruppenaktionen auf den zu den quasihomogenen Singularitäten aus U_{16} und $U_{1,0}$ gehörenden Flächensingularitäten ein.

Bemerkung:

Als zusätzliches Resultat erhalten wir aus der Analyse der Gleichungen Aussagen über die Anzahl der $\mathbb{C}^*$ - Orbits in den zu bestimmten μ - Klassen gehörenden Strata im Parameterteilraum T^+ einer minimalen guten transversalen Scheibe $\mathcal{T}$: $T \longrightarrow \mathfrak{m}^2$ der quasihomogenen Singularitäten aus U_{16} und $U_{1,0}$.
Für die Werte $a_o^2 = \frac{1}{3}$ und $a_o^2 = -\frac{1}{9}$ bei $U_{1,0}$ springt die Anzahl der $\mathbb{C}^*$ - Orbits. Dies erklärt das Verhalten der stetigen Familien aus Anhang A.5 für die Vereinfachungen

$$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{12} \;;\; U_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12} \;;\; U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,7} \text{ und}$$

$$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,8} .$$

Um dieses Phänomen zu verdeutlichen, führen wir auch für

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,7}$ eine Analyse der Gleichungen durch.

Ergebnis:

Für eine minimale gute transversale Scheibe $\mathcal{T}: T \longrightarrow m^2$ einer quasihomogenen isolierten Singularität h und eine Arnoldsche Klasse X bezeichne N(X) die Ordnung der Menge

$$\{t \in T^+ \mid \mathcal{T}(t) \in X\} / \mathbb{C}^*$$

Dann gilt für

(i) $h = x^3 + xz^2 + y^5 \in U_{16}$

$N(T_{2\,4\,9}) = 6 \quad ; \quad N(E_{14}) = 2$

(ii) $h = x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 \in U_{1,0}$, wobei $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$

N(X) für X =

	$T_{2\,3\,8}$	$T_{2\,3\,9}$	E_{12}	Z_{12}	$T_{2\,4\,7}$	Z_{13}
$a_o^2 = \frac{1}{3}$	0	1	1	3	3	0
$a_o^2 = -\frac{1}{9}$	1	0	0	2	2	1
$a_o^2 \neq \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$	1	0	1	3	3	0

Für die Interpretation beachte man die Vereinfachungen $Z_{13} \xrightarrow{\forall} Z_{12}, E_{12}, T_{2\,4\,7}$.

Das Ergebnis für $N(E_{12})$ in (ii) und das Ergebnis für $N(E_{14})$ aus (i) wird im folgenden nicht bewiesen.

V.2.6.1 Vorbereitung für die Analyse der Gleichungen

U_{16}: Wir verwenden die Normalform

$$f_{a_o,a_1}(x,y,z) = x^3 + xz^2 + y^5 + a_o x^2 y^2 + a_1 x^2 y^3, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Der quasihomogene Typ von $f_{0,0}$ ist (5,3,5;15).
Das Poincaré - Polynom ist

$$\chi(t) = t^{19} + t^{16} + 2t^{14} + t^{13} + 2t^{11} + t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^6 + 2t^5 + t^3 + 1$$

Es bezeichne V_j die Menge der Monome mit quasihomogenen Grad j bezüglich der Gewichtung (5,3,5). Es gilt

j	V_j
0	1
3	y
5	x, z
6	y^2
8	xy, zy
9	y^3

j	V_j
10	x^2, xz, z^2
11	xy^2, zy^2
13	x^2y, xzy, z^2y
14	xy^3, zy^3
16	x^2y^2, xzy^2, z^2y^2
19	x^2y^3, xzy^3, z^2y^3

Lemma:

(i) Die Menge $\{x^k y^\ell, zy^\ell \mid 0 \leq k \leq 2, 0 \leq \ell \leq 3\}$ repräsentiert eine Basis für $\mathcal{O}/\Delta f_{0,0}$.

(ii) $\{y^k \ (2 \leq k \leq 4),\ xy^k \ (1 \leq k \leq 3),\ zy^k \ (1 \leq k \leq 3),\ x^2y^k \ (0 \leq k \leq 3),\ xz,\ z^2\}$

repräsentiert eine Basis für $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f_{0,0}$.
Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5.

$\underline{U_{1,0}}$: Wir verwenden die Normalform

$$g_{a_0,a_1}(x,y,z) = x^3 + xz^2 + xy^3 + a_0 zy^3 + a_1 zy^4 \text{ , wobei}$$
$$a_0, a_1 \in \mathbb{C} \text{ und } a_0(a_0^2 + 1) \neq 0.$$

Der quasihomogene Typ von $g_{a_0,0}$ ist (3,2,3;9).
Das Poincaré - Polynom ist

$$\chi(t) = t^{11} + t^9 + 2t^8 + t^7 + 2t^6 + 2t^5 + t^4 + 2t^3 + t^2 + 1$$

Es bezeichne V_j die Menge der Monome mit quasihomogenen Grad j bezüglich der Gewichtung (3,2,3). Dann gilt

j	V_j
0	1
2	y
3	x, z
4	y^2
5	xy, zy

j	V_j
6	y^3, x^2, xz, z^2
7	xy^2, zy^2
8	y^4, x^2y, xzy, z^2y
9	$xy^3, zy^3, x^3, x^2z, xz^2, z^3$
11	$xy^4, zy^4, x^3y, x^2zy, xz^2y, z^3y$

Lemma:

(i) $\{y^k\ (0 \leq k \leq 4),\ zy^k\ (0 \leq k \leq 4),\ x, x^2, xy, x^2y\}$ repräsentiert eine Basis für $\mathcal{O}/\Delta g_{a_0,0}$, wenn $a_0(a_0^2+1) \neq 0$.

(ii) $\{y^k\ (2 \leq k \leq 4),\ zy^k\ (1 \leq k \leq 4), xy, xy^2, x^2y, x^2, xz, z^2\}$ repräsentiert eine Basis für $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta g_{a_0,0}$, wenn $a_0(a_0^2+1) \neq 0$. Die zugehörige minimale transversale Scheibe ist eine gute transversale Scheibe im Sinne von IV.2.5.

Um die Untersuchung der transversalen Scheibe für die quasihomogenen Singularitäten der Klassen U_{16} und $U_{1,0}$ simultan durchführen zu können, betrachten wir die folgende Familie

$$F(t) := x^3 + xz^2 + \sum_{k+\ell+m=2} t_{k\ell m} x^k y^\ell z^m + \sum_{\substack{k+\ell+m=3\\ \ell\neq 0}} t_{k\ell m} x^k y^\ell z^m +$$
$$t_{040} y^4 + t_{130} xy^3 + t_{220} x^2y^2 + t_{031} y^3 z +$$
$$t_{050} y^5 + t_{230} x^2y^3 + t_{041} y^4 z$$

Wir schreiben im folgenden kurz

$$F(t) = x^3 + xz^2 + \sum_{(k,\ell,m)\in J} t_{k\ell m} x^k y^\ell z^m ,$$

wobei J die Menge der Indizes (k,ℓ,m) der Parameter $t_{k\ell m}$ in F bezeichnet.

Durch Spezialisierung der in der folgenden Tabelle aufgeführten Koeffizienten $t_{k\ell m}$ erhält man aus F transversale bzw. minimale transversale Scheiben T: $T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$ für die quasihomogenen Singularitäten aus U_{16} und $U_{1,0}$. Dabei bezeichne $T = T^+ \oplus T^o \oplus T^-$ die durch die $\mathbb{C}^*$-Aktion induzierte Zerlegung der Parameterräume der so erhaltenen transversalen Scheiben.

	transversale Scheibe	minimale transv. Scheibe, zusätzl. Bedingungen	Parameter für T^o	T^-
U_{16}	$t_{050} = 1$ $t_{041} = 0$	$t_{111} = 0$ $t_{012} = 0$		t_{220} t_{230}
$U_{1,0}$	$t_{220} = t_{230} = 0$ $t_{050} = 0$ $t_{130} = 1$ $t_{031} = a_o + t'_{031}$ mit $a_o(a_o^2+1) \neq 0$	$t_{111} = 0$ $t_{012} = 0$	t_{031}	t_{041}

Auf Grund des Resultates von Wirthmüller setzen wir bei der Untersuchung der transversalen Scheibe im Fall U_{16} $t_{2\,3\,0} = 0$, im Fall $U_{1,0}$ $t_{0\,4\,1} = 0$. Die in II.2.4.5 durchgeführte Überlegung zeigt, daß wir bei der Untersuchung der quasihomogenen Singularitäten aus $U_{1,0}$ o.B.d.A. $t'_{0\,3\,1} = 0$ setzen können.

Wir setzen im folgenden stets $t_{2\,3\,0} = t_{0\,4\,1} = 0$ voraus, das heißt, wir untersuchen die Familie

$$\mathcal{F}^*(t) := x^3 + xz^2 + \sum_{(k,\ell,m)\in J^*} t_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m$$

mit $J^* = J - \{(2,3,0),(0,4,1)\}$.

Wir betrachten eine weitere Familie

$$\mathcal{G}(s) := 2ix^2z + xz^2 + \sum_{(k,\ell,m)\in J^*} s_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m$$

<u>Lemma</u>:

Es gilt $\mathcal{F}^*(t)(x,y,z+ix) = \mathcal{G}(s)(x,y,z)$, wobei sich die Parameter $s_{k\,\ell\,m}$ aus den Parametern $t_{k\,\ell\,m}$ wie folgt berechnen (dabei ist $s_{k\,\ell\,m} = t_{k\,\ell\,m} = 0$ für $(k,\ell,m) \notin J^*$ zu setzen):

$$s_{k\,\ell\,2} = t_{k\,\ell\,2}$$

$$s_{k\,\ell\,1} = t_{k\,\ell\,1} + 2it_{k-1\,\ell\,2}$$

$$s_{k\,\ell\,0} = t_{k\,\ell\,0} + it_{k-1\,\ell\,1} - t_{k-2\,\ell\,2}$$

Die Zuordnung

$$\mathbb{C}^{|J^*|} \ni (s_{k\,\ell\,m}) \longmapsto (t_{k\,\ell\,m}) \in \mathbb{C}^{|J^*|}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

$\square$

Wenn wir die Vereinfachungen in Singularitäten mit Korang 2 untersuchen, machen wir für den 2-Jet von $\mathcal{F}^*$ bzw. $\mathcal{G}$ den Ansatz

$$(ax + by + cz)^2 =: \sum_{k+\ell+m=2} t_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m \qquad \text{bzw.}$$

$$(ex + fy + gz)^2 =: \sum_{k+\ell+m=2} s_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m$$

Dabei gelten im Sinne des vorigen Lemmas die Beziehungen

$$e = a + ic \quad ; \quad f = b \quad ; \quad g = c$$

Auf Grund der in IV.3.2.1 beschriebenen Reduktion von Flächen- auf Kurvensingularitäten gilt folgendes

Abspaltungslemma für $\mathcal{F}^*$:

Ist $c \neq 0$, so gilt für

$$\mathcal{F}^*(t) = x^3 + xz^2 + (ax + by + cz)^2 + \sum_{\substack{(k,\ell,m) \in J^* \\ k+\ell+m \geq 3}} t_{k\ell m} x^k y^\ell z^m :$$

$\mathcal{F}^*(t)$ ist (bis auf Umbenennung der Variablen) kontaktäquivalent zu

$$w^2 + \sum_{k,\ell \geq 0} d_{k\ell}(t) u^k v^\ell$$

Die Koeffizienten $d_{k\ell}$ mit $d_{k\ell} \neq 0$ sind

$$d_{30} = -4a^2 - 4c^2$$
$$d_{21} = -4c^2 t_{210} - 4a^2 t_{012} + 4act_{111} - 8ab$$
$$d_{12} = 4act_{021} - 4c^2 t_{120} - 8abt_{012} + 4bct_{111} - 4b^2$$
$$d_{03} = 4bct_{021} - 4c^2 t_{030} - 4b^2 t_{012}$$

$$d_{40} = -4$$
$$d_{31} = -4t_{210} - 4t_{012}$$
$$d_{22} = t_{111}^2 - 4t_{120} - 4t_{012}t_{210} - 4c^2 t_{220}$$
$$d_{13} = 2t_{021}t_{111} + 4act_{031} - 4c^2 t_{130} - 4t_{030} - 4t_{012}t_{120}$$
$$d_{04} = t_{021}^2 + 4bct_{031} - 4c^2 t_{040} - 4t_{012}t_{030}$$

$$d_{32} = -4t_{220}$$
$$d_{23} = -4t_{130} - 4t_{012}t_{220}$$
$$d_{14} = 2t_{111}t_{031} - 4t_{040} - 4t_{012}t_{130}$$
$$d_{05} = 2t_{021}t_{031} - 4c^2 t_{050} - 4t_{012}t_{040}$$

$$d_{15} = -4t_{050}$$
$$d_{06} = -4t_{012}t_{050} + t_{031}^2$$

□

Abspaltungslemma für $\mathcal{G}$:

Ist $e \neq 0$, so ist

$$\mathcal{G}(s) = 2ix^2z + xz^2 + (ex + fy + gz)^2 + \sum_{\substack{(k,\ell,m) \in J^* \\ k+\ell+m \geq 3}} s_{k\ell m} x^k y^\ell z^m$$

bis auf Umbenennung der Variablen kontaktäquivalent zu

$$w^2 + \sum_{k,\ell \geq 0} d_{k\ell}(s) u^k v^\ell .$$

Die Koeffizienten $d_{k\ell}$ mit $d_{k\ell} \neq 0$ sind

$d_{30} = 4eg - 8ig^2$

$d_{21} = 4egs_{111} + 4ef - 4e^2 s_{012} - 16ifg - 4g^2 s_{210}$

$d_{12} = 4egs_{120} + 4efs_{111} - 4e^2 s_{021} - 8if^2 - 8fgs_{210}$

$d_{03} = 4efs_{120} - 4e^2 s_{030} - 4f^2 s_{210}$

$d_{40} = 1$

$d_{31} = 2s_{111} - 8is_{012}$

$d_{22} = s_{111}^2 + 2s_{120} - 8is_{021} - 4s_{210}s_{012} - 4g^2 s_{220}$

$d_{13} = 2s_{111}s_{120} + 4egs_{130} - 4e^2 s_{031} - 8is_{030} -$
$\quad 4s_{210}s_{021} - 8fgs_{220}$

$d_{04} = s_{120}^2 + 4efs_{130} - 4e^2 s_{040} - 4s_{210}s_{030} - 4f^2 s_{220}$

$d_{23} = 2s_{130} - 8is_{031} - 4s_{012}s_{220}$

$d_{14} = 2s_{111}s_{130} - 8is_{040} - 4s_{210}s_{031} - 4s_{021}s_{220}$

$d_{05} = 2s_{120}s_{130} - 4e^2 s_{050} - 4s_{210}s_{040} - 4s_{030}s_{220}$

$d_{15} = -8is_{050} - 4s_{031}s_{220}$

$d_{06} = s_{130}^2 - 4s_{210}s_{050} - 4s_{040}s_{220}$

$d_{07} = -4s_{050}s_{220}$

$\square$

Wir werden wahlweise $\mathcal{F}^*$ oder $\mathcal{G}$ untersuchen, je nachdem was günstiger ist. Für die Untersuchung von $\mathcal{F}^*$ und $\mathcal{G}$ auf Singularitäten mit Korang 2 genügt es, die Multiplizitätensequenzen der durch $\sum d_{k\ell}u^k v^\ell$ gemäß der Abspaltungslemmatas definierten Kurvensingularitäten zu untersuchen. Um eine Verwechselung der $d_{k\ell}$ auszuschließen, geben wir stets die verwendete Familie ($\mathcal{F}^*$ oder $\mathcal{G}$) an.

Bevor wir mit der eigentlichen Untersuchung beginnen, halten wir noch einige einfache Beobachtungen fest.

Bemerkung und Lemma:

(i) Ist $a = c = 0$, $b \neq 0$, so ist $\mathcal{F}^*(t)$ eine D_4 - Singularität. Wir setzen deshalb im folgenden voraus, daß a und c nicht gleichzeitig verschwinden.

(ii) Auf Grund von (i) können wir o.B.d.A. annehmen, daß $a + ic$ und $a - ic$ nicht gleichzeitig verschwinden. Der Parameterwechsel

$$t_{k\ell m} \longmapsto (-1)^m t_{k\ell m} \quad , \quad (k,\ell,m) \in J^* \text{ und } k+\ell+m \geq 3$$
$$a \longmapsto a$$
$$b \longmapsto b$$
$$c \longmapsto -c$$

respektiert die Rechtsäquivalenzklassen. Wir werden deshalb bei der Untersuchung von Vereinfachungen in Singularitäten mit Korang 2 o.B.d.A. $a + ic \neq 0$ voraussetzen.

(iii) Der Fall $[\, a + ic = 0$ und $a - ic \neq 0 \,]$ wird durch den Parameterwechsel in den Fall $[\, a + ic \neq 0$ und $a - ic = 0 \,]$ überführt.
Für die Untersuchung von $\mathcal{G}$ bedeutet dies:
Wir können o.B.d.A. $e \neq 0$ voraussetzen. Der Fall $e = 0$ wird durch einen geeigneten Parameterwechsel in den Fall $e = 2ig$ überführt.

(iv) Bei der Untersuchung von $\mathcal{F}^*$ stellt man fest:
Für $c(a^2 + c^2) = 0$ ist E_6 die einzig mögliche Singularität aus der Gruppierung E. Für $c \neq 0$ benutze man das Abspaltungslemma für $\mathcal{F}^*$, für $c = 0$ das Abspaltungslemma für $\mathcal{G}$ unter Berücksichtigung von (i) und der Beziehung $(a + ic, b, c) = (e, f, g)$.

□

V.2.6.2 Untersuchung $U_{1,0} \longrightarrow T_{2\,3\,8} / T_{2\,3\,9}$

2.6.2.1 Aufstellen der Gleichungen

In der folgenden Untersuchung verwenden wir die Familie $\mathcal{F}^*$. Es bezeichne $\sum d_{k\,\ell} u^k v^\ell$ die Kurvenfamilie aus dem Abspaltungslemma für $\mathcal{F}^*$. Wir setzen

$$t_{2\,2\,0} = t_{0\,5\,0} = 0.$$

Wegen Bemerkung (iv) setzen wir ferner <u>stets</u>

$$c(a^2 + c^2) \neq 0$$

voraus. Es ist

$$d_{3\,0} = -4(a^2 + c^2) \neq 0.$$

Damit die Kurvenfamilie in (0,0) eine Singularität aus der Klasse $T_{2\,3\,r}$, $r \geq 6$ hat, ist es notwendig, daß der Tangentialkegel in (0,0) durch die Gleichung

$$(*) \qquad d_{3\,0}(u - Av)^3 = 0$$

mit geeignetem $A \in \mathbb{C}$ beschrieben wird.

Wir substituieren $u \longmapsto u + Av$ und führen anschließend einen σ - Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum_{k,\ell \geq 0} d^{(1)}_{k\,\ell} u^k v^\ell \quad \text{mit } d^{(1)}_{3\,0} = d_{3\,0}$$

beschrieben. Die Bedingung (*) ist dann zu den Bedingungen I - III äquivalent:

$$\text{I} \qquad d^{(1)}_{0\,0} = 0$$

$$d^{(1)}_{0\,0} = d_{0\,3} + Ad_{1\,2} + A^2 d_{2\,1} + A^3 d_{3\,0}$$

$$t_{0\,3\,0} + At_{1\,2\,0} + A^2 t_{2\,1\,0} + A^3 = c^{-1}(b + aA)(t_{0\,2\,1} + At_{1\,1\,1}) - c^{-2}(b + aA)^2(t_{0\,1\,2} + A)$$

II $\quad d^{(1)}_{1\,0} = 0$

$$d^{(1)}_{1\,0} = d_{1\,2} + 2Ad_{2\,1} + 3A^2 d_{3\,0}$$

$$t_{1\,2\,0} + 2At_{2\,1\,0} + 3A^2 = c^{-1}(b+aA)t_{1\,1\,1} + c^{-1}a(t_{0\,2\,1} + At_{1\,1\,1}) \\ -2c^{-2}a(b+aA)(t_{0\,1\,2} + A) \\ -c^{-2}(b+aA)^2$$

Gleichung II entsteht aus I durch formales Ableiten nach A!

III $\quad d^{(1)}_{2\,0} = 0$

$$d^{(1)}_{2\,0} = d_{2\,1} + 3Ad_{3\,0}$$

$$t_{2\,1\,0} + 3A = -c^{-2}a^2 t_{0\,1\,2} + c^{-1}at_{1\,1\,1} - 2c^{-2}ab - 3c^{-2}a^2 A$$

Damit das strikte Urbild in (0,0) die Multiplizität 3 hat, muß

$$d^{(1)}_{0\,1} = d^{(1)}_{1\,1} = d^{(1)}_{0\,2} = 0$$

gelten. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$Z_1 = t_{0\,2\,1} + At_{1\,1\,1} - 2c^{-1}(b+aA)(t_{0\,1\,2} + A)$$

$$Z_2 = t_{0\,3\,1} - c^{-2}(t_{0\,1\,2} + A)Z_1$$

$$Y = 2c^{-1}(b+aA) + 2c^{-1}a(t_{0\,1\,2} + A) - t_{1\,1\,1} = -\frac{\partial Z_1}{\partial A}$$

IV $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$$d^{(1)}_{0\,1} = d_{0\,4} + Ad_{1\,3} + A^2 d_{2\,2} + A^3 d_{3\,1} + A^4 d_{4\,0}$$

$$4(t_{0\,4\,0} + At_{1\,3\,0}) = 4c^{-1}(b+aA)t_{0\,3\,1} + c^{-2}Z_1^2 \qquad [I]$$

V $\quad d^{(1)}_{1\,1} = 0$

$$d^{(1)}_{1\,1} = d_{1\,3} + 2Ad_{2\,2} + 3A^2 d_{3\,1} + 4A^3 d_{4\,0}$$

$$4t_{1\,3\,0} = 4c^{-1}at_{0\,3\,1} - 2c^{-2}Z_1 Y \qquad [I,II]$$

VI $\quad d^{(1)}_{0\,2} = 0$

$$d^{(1)}_{0\,2} = d_{0\,5} + Ad_{1\,4} + A^2 d_{2\,3} + A^3 d_{3\,2}$$

$$0 = c^{-2}(t_{0\,1\,2} + A)Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 \qquad [IV]$$

Genau dann liegt eine Singuarität vom Typ $T_{2\,3\,7}$, $r \geq 7$, vor, wenn der Tangentialkegel in (0,0) durch die Gleichung

$$d_{3\,0}(u - B_1 v)^2 (u - B_2 v) = 0 \quad \text{mit } B_1 \neq B_2$$

beschrieben wird. Dies ergibt Bedingungen VII - IX.

VII

$$d^{(1)}_{2\,1} = (-2B_1 - B_2)d_{3\,0}$$

$$d^{(1)}_{2\,1} = d_{2\,2} + 3Ad_{3\,1} + 6A^2 d_{4\,0} =$$

$$-4(t_{1\,2\,0} + 2At_{2\,1\,0} + 3A^2) - 4(t_{0\,1\,2} + A)(t_{2\,1\,0} + 3A) + t^2_{1\,1\,1}$$

$$4(2B_1 + B_2)(a^2 + c^2) = Y^2 - 4c^{-1}aZ_1 \qquad [II,III]$$

VIII

$$d^{(1)}_{1\,2} = (B_1^2 + 2B_1B_2)d_{3\,0}$$

$$d^{(1)}_{1\,2} = d_{1\,4} + 2Ad_{2\,3} + 3A^2 d_{3\,2}$$

$$4(B_1^2 + 2B_1B_2)(a^2 + c^2) = c^{-2}Z_1^2 + 2Z_2Y \qquad [IV,V]$$

IX

$$d^{(1)}_{0\,3} = -B_1^2 B_2 d_{3\,0}$$

$$d^{(1)}_{0\,3} = d_{0\,6}$$

$$4B_1^2 B_2(a^2 + c^2) = Z_2^2 \qquad [VI]$$

Wir substituieren $u \longmapsto u + B_1 v$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch

$$\sum_{k,\ell} d^{(2)}_{k\,\ell} u^k v^\ell \qquad \text{mit } d^{(2)}_{0\,0} = d^{(2)}_{1\,0} = 0$$

$$d^{(2)}_{2\,0} = (B_1 - B_2)d_{3\,0}$$

$$d^{(2)}_{3\,0} = d^{(1)}_{3\,0} = d_{3\,0}$$

beschrieben.

notwendige Bedingung für $T_{2\,3\,8}$:

X

$$d^{(2)}_{0\,1} = 0$$

$$d^{(2)}_{0\,1} = B_1^2 d^{(1)}_{2\,2} + B_1^3 d^{(1)}_{3\,1} = B_1^2 d_{2\,3} + B_1^3(d_{3\,1} + 4Ad_{4\,0})$$

$$0 = -4B_1^2 t_{1\,3\,0} + 4B_1^3[c^{-1}aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]$$

[III]

notwendige Bedingung für $T_{2\,3\,9}$: Es existiert ein $C \in \mathbb{C}$, so daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind

XI
$$d^{(2)}_{1\,1} = -2(B_1 - B_2)Cd_{3\,0}$$
$$d^{(2)}_{1\,1} = 2B_1 d^{(1)}_{2\,2} + 3B_1^2 d^{(1)}_{3\,1} = -B_1 d^{(1)}_{2\,2} \qquad [X]$$
$$8(B_1 - B_2)C(a^2 + c^2) = 4B_1 t_{1\,3\,0}$$

XII
$$d^{(2)}_{0\,2} = (B_1 - B_2)C^2 d_{3\,0}$$
$$d^{(2)}_{0\,2} = B_1^4 d^{(1)}_{4\,1} = B_1^4 d_{4\,0}$$
$$-4(B_1 - B_2)C^2(a^2 + c^2) = -4B_1^4$$

2.6.2.2 Analyse der Gleichungen

Wir setzen

$$t_{2\,2\,0} = t_{0\,5\,0} = 0$$
$$t_{1\,3\,0} = 1$$
$$t_{0\,3\,1} = a_o \text{ , wobei } a_o \in \mathbb{C} \text{ mit } a_o(a_o^2 + 1) \neq 0.$$

Wir untersuchen also den Parameterteilraum T^+ der in 2.6.1 angegebenen transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$.

Eine Lösung der Gleichungen I - X mit $B_1 \neq B_2$ und $c(a^2 + c^2) \neq 0$ heißt zulässige Lösung. Für zulässige Lösungen liegt eine $T_{2\,3\,r}$ - Singularität mit $r \geq 8$ vor. Aus der Untersuchung der Milnorgitter folgt:
Es ist $r \leq 9$, und $r = 9$ gilt genau dann, wenn zusätzlich die Gleichungen XI und XII für geeignetes C erfüllt sind.

Die zulässigen Lösungen lassen sich leicht berechnen, wenn wir die Lösungen der Gleichungen V - X kennen.

<u>relevantes Gleichungssystem (V - X):</u>

V $\quad 4 = 4a_o c^{-1} a - 2c^{-2} Z_1 Y$

VI $\quad 0 = c^{-2}(t_{0\,1\,2} + A) Z_1^2 + 2Z_1 Z_2$

VII $\quad 4(2B_1 + B_2)(a^2 + c^2) = -4c^{-1} a Z_1 + Y^2$

VIII $\quad -4(B_1^2 + 2B_1 B_2)(a^2 + c^2) = -c^{-2} Z_1^2 - 2Z_2 Y$

IX $\quad 4B_1^2 B_2 (a^2 + c^2) = Z_2^2$

X $\quad 4B_1^2 = 4B_1^3 [c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]$

$[Z_2]$ $\quad Z_2 = a_o - c^{-2}(t_{0\,1\,2} + A) Z_1$ nach Definition

Es gibt keine zulässige Lösung mit $B_1 = 0$ (sonst folgt $Z_2 = 0$ [IX], $Z_1 = 0$ [VIII], $a_o = 0$ $[Z_2]$).

(0) $\quad B_1^{-1} = c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)$ [X]

(1) $\quad 4B_2(a^2 + c^2) = B_1^{-2} Z_2^2$ [IX]

Einsetzen in B_1^{-1} [VII] ergibt

(2) $\quad 8(a^2 + c^2) + Z_2^2 [c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]^3 =$
$(-4c^{-1} a Z_1 + Y^2)[c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]$

Einsetzen in B_1^{-2} [VIII] ergibt

(3) $\quad -4(a^2 + c^2) - 2Z_2^2 [c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]^3 =$
$(-c^{-2} Z_1^2 - 2Z_2 Y)[c^{-1} aY - c^{-2}(a^2 + c^2)(t_{0\,1\,2} + A)]^2$

Gleichung VI bedingt eine Fallunterscheidung für Z_1.

<u>Fall $Z_1 \neq 0$:</u>

Wir werden sehen, daß dieser Fall für zulässige Lösungen nicht eintreten kann.
Für zulässige Lösungen ist $t_{0\,1\,2} + A \neq 0$ (sonst folgt $Z_2 = 0$ [VI], $a_o = 0$ $[Z_2]$).
Aus den Gleichungen [V], [VI] und $[Z_2]$ folgt dann

$$Z_2 = -a_o$$
$$Z_1 = 2a_o c^2 (t_{0\,1\,2} + A)^{-1}$$
$$Y = (c^{-1} a - a_o^{-1})(t_{0\,1\,2} + A)$$

Einsetzen in $2\cdot(2)+(3)$ ergibt

$$12(a^2+c^2) = (a_o^{-1}c^{-1}a+1)\,\{12a_oca - 4a_o^2c^2 + 2(t_{012}+A)^3\cdot (c^{-1}a - a_o^{-1})(a_o + a_o^{-1})\}$$

also

$$(4)\qquad (t_{012}+A)^3(a_o^{-1}c^{-1}a+1)(a_o+a_o^{-1})(c^{-1}a-a_o^{-1}) = 6c^2 - 4a_oca + 2a_o^2c^2$$

Elimination von Z_1, Z_2 und Y aus (2) ergibt

$$8(a^2+c^2) - a_o^2(t_{012}+A)^3(a_o^{-1}c^{-1}a+1)^3 = \{8a_oca - (t_{012}+A)^3(c^{-1}a-a_o^{-1})^2\}\,(a_o^{-1}c^{-1}a+1)$$

Sortieren der Summanden ergibt

$$(5)\qquad (t_{012}+A)^3(a_o^{-1}c^{-1}a+1)(a_o+a_o^{-1})(-2c^{-1}a+a_o^{-1}-a_o) = -8c^2 + 8a_oca$$

Einsetzen von (4) in $(c^{-1}a - a_o^{-1})\cdot(5)$, Ausmultiplizieren und erneutes Zusammenfassen ergibt

$$2a_o^{-1}c^2(a_o^2+1)^2 = 0$$

Widerspruch für zulässige Lösungen!

Fall $Z_1 = 0$:

$a \neq 0$ und $c = a_oa$ [V]

$Z_2 = a_o$ [Z_2]

$t_{012}+A \neq 0$ [(2)]

Weil $c^{-1}aY - c^{-2}(a^2+c^2)(t_{012}+A) \neq 0$ (folgt aus (0)), gilt

$$(6)\qquad Y = \tfrac{3}{2}a_o^{-1}(a_o^2+1)(t_{012}+A) \qquad [(2)+2\cdot(3)]$$

$$(7)\qquad (t_{012}+A)^3 = 8a_o^4(a_o^2+1)^{-2}a^2 \qquad [(2),(6)]$$

Die Lösungen des relevanten Gleichungssystems, die zulässige Lösungen induzieren, sind ($t \in \mathbb{C}$ mit $t \neq 0$)

$a^2 = a_o^2(1+a_o^2)^2 t^3$ $\qquad Z_1 = 0$ $\qquad B_1 = (1+a_o^2)^{-1} t^{-1}$

$c = a_o a$ $\qquad Z_2 = a_o$ $\qquad B_2 = 4^{-1} B_1$

$t_{0\,1\,2} + A = 2a_o^2 t$ $\qquad Y = 3a_o(1+a_o^2)t$

Wir untersuchen jetzt, wann die Gleichungen XI und XII für zulässige Lösungen erfüllt sind.
Aus Gleichung XI folgt

$$C = \tfrac{2}{3} a_o^{-2}(1+a_o^2)^{-3} t^{-3}$$

Einsetzen in Gleichung XII zeigt

$$\text{Gleichung XII ist erfüllt} \iff a_o^2 = \tfrac{1}{3}$$

Die Berechnung der zulässigen Lösungen mit $A = b = 0$ ergibt die im Anhang A.5 angegebene Familie

$$x^3 + xz^2 + (x + a_o z)y^3 + a_o^2(1+a_o^2)^2 t^3 (x + a_o z)^2 + 2t(x + a_o z)^2 y - 3(1+a_o^2)txy(x + a_o z)$$

Als Ergebnis der Untersuchung erhalten wir (beachte II.2.4.5)

<u>Satz:</u>

(i) $U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,3\,8}$;
$x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 + a_1 zy^4$ mit $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$
μ - vereinfacht sich genau dann in $T_{2\,3\,9}$, wenn $a_o^2 = \frac{1}{3}$.

(ii) Im Teilraum T^+ einer minimalen guten transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$, $a_o(a_o^2 + 1)$, gibt es genau einen $\mathbb{C}^*$ - Orbit, wo eine Singularität aus $T_{2\,3\,8}$ oder $T_{2\,3\,9}$ vorliegt. Es ist genau dann eine $T_{2\,3\,9}$ - singularität, wenn $a_o^2 = \frac{1}{3}$.

$\square$

V.2.6.3 Untersuchung $U \longrightarrow Z, W$

2.6.3.1 Aufstellen der Gleichungen

allgemeiner Ansatz (Gleichungen I - VIII):

Für die folgenden Untersuchungen verwenden wir die Familie $\mathcal{G}$. Wir setzen dabei stets $e = a + ic \neq 0$ voraus. Der Fall $e = 0$ kann durch einen Parameterwechsel in den Fall $e = 2ig \neq 0$ überführt werden.

Es bezeichne $\sum d_{k\ell} u^k v^\ell$ die Kurvenfamilie aus dem Abspaltungslemma für $\mathcal{G}$. Es ist $d_{40} = 1$. Die Kurvenfamilie hat genau dann im Nullpunkt eine Singularität aus der Gruppierung Z oder W, die nicht vom Typ T_{244} ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$d_{30} = 0 \qquad d_{21} = 0$$
$$d_{12} = 0 \qquad d_{03} = 0$$

(*) Es existieren $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$, so daß gilt

$$\sum_{k+\ell=4} d_{k\ell} u^k v^\ell = d_{40}(u - A_1 v)^2 (u - A_2 v)(u - A_3 v)$$

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein

$$Z_1 := s_{120} + A_1 s_{111} + A_1^2 - 2e^{-1}(f + gA_1)(s_{210} + 2iA_1)$$
$$Z_2 := s_{130} - e^{-2}(s_{210} + 2iA_1)Z_1 - 2e^{-1}(f + gA_1)s_{220}$$
$$Y := s_{111} + 2A_1 - 2e^{-1}g(s_{210} + 2iA_1) - 4ie^{-1}(f + gA_1)$$
$$= \frac{\partial Z_1}{\partial A_1}$$

Die Bedingungen (*) sind zu den Bedingungen I - VIII äquivalent (man betrachte die Substitution $u \longmapsto u + A_1 v$)

I $\quad d_{03} + A_1 d_{12} + A_1^2 d_{21} + A_1^3 d_{21} + A_1^3 d_{30} = 0$

$4(s_{030} + A_1 s_{021} + A_1^2 s_{012}) =$

$4e^{-1}(f + gA_1)(s_{120} + A_1 s_{111} + A_1^2) -$

$4e^{-2}(f + gA_1)^2(s_{210} + 2iA_1)$

II $\quad d_{12} + 2A_1 d_{21} + 3A_1^2 d_{30} = 0$

$$4(s_{021} + 2A_1 s_{012}) = 4e^{-1}g(s_{120} + A_1 s_{111} + A_1^2) + 4e^{-1}(f + gA_1)(s_{111} + 2A_1) - 8e^{-2}g(f + gA_1)(s_{210} + 2iA_1) - 8ie^{-2}(f + gA_1)^2$$

III $\quad d_{21} + 3A_1 d_{30} = 0$

$$4s_{012} = -4e^{-2}g^2 s_{210} + 4e^{-1}gs_{111} + 4e^{-1}f - 16ie^{-2}fg + 12e^{-1}gA_1 - 24ie^{-2}g^2A_1$$

IV $\quad d_{30} = 0$

$$0 = 4eg - 8ig^2$$

V $\quad d_{04} + A_1 d_{13} + A_1^2 d_{22} + A_1^3 d_{31} + A_1^4 d_{40} = 0$

$d_{00}^{(1)} = 0$ in anderer Notation

$$4(s_{040} + A_1 s_{031}) = e^{-2}Z_1^2 + 4e^{-1}(f + gA_1)s_{130} - 4e^{-2}(f + gA_1)^2 s_{220} \qquad [I]$$

VI $\quad d_{13} + 2A_1 d_{22} + 3A_1^2 d_{31} + 4A_1^3 d_{40} = 0$

$d_{10}^{(1)} = 0$ in anderer Notation

$$4s_{031} = 2e^{-2}YZ_1 + 4e^{-1}gs_{130} - 8e^{-2}g(f + gA_1)s_{220} \qquad [I,II]$$

VII $\quad d_{22} + 3A_1 d_{31} + 6A_1^2 d_{40} = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$

$d_{20}^{(1)} = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$ in anderer Notation

$$(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Z_1 + Y^2 - 4g^2 s_{220} \qquad [II,III]$$

VIII $\quad d_{31} + 4A_1 d_{40} = (A_1 - A_2) + (A_1 - A_3)$

$d_{30}^{(1)} = (A_1 - A_2) + (A_1 - A_3)$ in anderer Notation

$$(A_1 - A_2) + (A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Y \qquad [III,IV]$$

Wir substituieren $u \longmapsto u + A_1 v$ und führen anschließend einen σ-Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum_{k,\ell} d_{k\ell}^{(1)} u^k v^\ell$$

.

mit

$$d^{(1)}_{0\,0} = d^{(1)}_{1\,0} = 0 \qquad d^{(1)}_{3\,0} = (A_1 - A_2) + (A_1 - A_3)$$

$$d^{(1)}_{2\,0} = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \qquad d^{(1)}_{4\,0} = d_{4\,0} = 1$$

beschrieben.

<u>Berechnung der $d^{(1)}_{k\,\ell}$ mit $\ell \neq 0$:</u>

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{0\,1} &= d_{0\,5} + A_1 d_{1\,4} + A_1^2 d_{2\,3} = \\ &-4e^2 s_{0\,5\,0} + 2(s_{1\,2\,0} + A_1 s_{1\,1\,1} + A_1^2) s_{1\,3\,0} - 4(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)\cdot \\ &(s_{0\,4\,0} + A_1 s_{0\,3\,1}) - 4(s_{0\,3\,0} + A_1 s_{0\,2\,1} + A_1^2 s_{0\,1\,2}) s_{2\,2\,0} = \\ &= -4e^2 s_{0\,5\,0} + 2Z_1 Z_2 + e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1) Z_1^2 \qquad [\mathrm{I,V}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{1\,1} &= d_{1\,4} + 2A_1 d_{2\,3} = 2(s_{1\,1\,1} + 2A_1) s_{1\,3\,0} - 8i(s_{0\,4\,0} + A_1 s_{0\,3\,1}) - \\ &4(s_{2\,1\,0} + 2iA_1) s_{0\,3\,1} - 4(s_{0\,2\,1} + 2A_1 s_{0\,1\,2}) s_{2\,2\,0} = \\ &= -2ie^{-2} Z_1^2 + 2YZ_2 - 4e^{-1} g Z_1 s_{2\,2\,0} \qquad [\mathrm{II,V,VI}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{2\,1} &= d_{2\,3} = (2 - 8ie^{-1} g) Z_2 + (2 - 8ie^{-1} g) e^{-2} (s_{2\,1\,0} + 2iA_1) Z_1 \\ &- 4ie^{-2} YZ_1 - 4e^{-1} gY s_{2\,2\,0} - 4e^{-2} g^2 (s_{2\,1\,0} + 2iA_1) s_{2\,2\,0} \\ &\qquad [\mathrm{III,VI}] \end{aligned}$$

Die folgenden Gleichungen für $d^{(1)}_{0\,2}$, $d^{(1)}_{1\,2}$, $d^{(1)}_{0\,3}$ gelten nur im Falle von $d^{(1)}_{0\,1} = 0$. Mittels dieser Gleichung wird $s_{0\,5\,0}$ eliminiert.

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{0\,2} &= d_{0\,6} + A_1 d_{1\,5} \\ &= Z_2^2 - e^{-2} Z_1^2 s_{2\,2\,0} \qquad [\mathrm{V},\ d^{(1)}_{0\,1} = 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{1\,2} &= d_{1\,5} = -2ie^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1) Z_1^2 - 4ie^{-2} Z_1 Z_2 + \\ &\{-2e^{-2} YZ_1 - 4e^{-1} g Z_2 - 4e^{-3} g (s_{2\,1\,0} + 2iA_1) Z_1\} s_{2\,2\,0} \\ &\qquad [\mathrm{VI},\ d^{(1)}_{0\,1} = 0] \end{aligned}$$

$$d^{(1)}_{0\,3} = d_{0\,7} = -e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1) Z_1^2 s_{2\,2\,0} - 2e^{-2} Z_1 Z_2 s_{2\,2\,0} \qquad [d^{(1)}_{0\,1} = 0]$$

Gleichungen für $T_{2\,4\,r}$:

Es müssen A_1, A_2, A_3 paarweise verschieden sein. Eine Singularität aus der Klasse $T_{2\,4\,5}$ liegt genau dann vor, wenn $d^{(1)}_{0\,1}$ nicht verschwindet.

notwendige Bedingung für $T_{2\,4\,6}$:

IX $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$$4s_{0\,5\,0} = 2e^{-2}Z_1Z_2 + e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2$$

notwendige Bedingung für $T_{2\,4\,7}$:
Es existiert $B \in \mathbb{C}$, so daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind

X $\quad d^{(1)}_{1\,1} = -2B(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$

$$-2B(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = 2YZ_2 - 2ie^{-2}Z_1^2 - 4e^{-1}gZ_1s_{2\,2\,0}$$

XI $\quad d^{(1)}_{0\,2} = B^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)$

$$B^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = Z_2^2 - e^{-2}Z_1^2s_{2\,2\,0}$$

Wir substituieren $u \longmapsto u + Bv$ und führen anschließend einen σ - Prozeß durch. Das strikte Urbild wird dann durch eine Kurvenfamilie der Gestalt

$$\sum_{k,\ell} d^{(2)}_{k\,\ell}u^kv^\ell \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} d^{(2)}_{0\,0} &= d^{(2)}_{1\,0} = 0 \\ d^{(2)}_{2\,0} &= (A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \end{aligned}$$

beschrieben.

notwendige Bedingung für $T_{2\,4\,8}$:

$$d^{(2)}_{0\,1} = 0$$

$$d^{(2)}_{0\,1} = d^{(1)}_{0\,3} + Bd^{(1)}_{1\,2} + B^2d^{(1)}_{2\,1} + B^3d^{(1)}_{3\,0}$$

Es ist $d^{(1)}_{3\,0} = (2 - 8ie^{-1}g)Y \quad$ [VIII]

Wir eliminieren $d^{(1)}_{0\,3}, d^{(1)}_{1\,2}, d^{(1)}_{2\,1}, d^{(1)}_{3\,0}$ in der Gleichung

$$0 = d^{(1)}_{0\,3} + Bd^{(1)}_{1\,2} + B^2d^{(1)}_{2\,1} + B^3d^{(1)}_{3\,0}$$

und addieren anschließend das $(-1)e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)$ - fache der Gleichung

$$B^2[VII] + B[X] + [XI]$$

hinzu.

$B^2[VII] + B[X] + [XI]$:

$$0 = (Z_2 + YB)^2 - 2ie^{-2}Z_1^2B + (2 - 8ie^{-1}g)Z_1B^2 - (e^{-1}Z_1 + 2gB)^2 s_{2\,2\,0}$$

Wir erhalten die Gleichung

XII $$0 = (Z_2 + YB)\{-4ie^{-2}Z_1B - e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)(Z_2 + YB) + (2 - 8ie^{-1}g)B^2 - 2e^{-2}Z_1s_{2\,2\,0} - 4e^{-1}gBs_{2\,2\,0}\}$$

notwendige Bedingung für $T_{2\,4\,9}$:
Es existiert ein $C \in \mathbb{C}$, so daß gilt

$$\left| \begin{array}{l} d_{1\,1}^{(2)} = -2C(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \\ d_{0\,2}^{(2)} = C^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \end{array} \right.$$

Es ist

$$d_{0\,2}^{(2)} = B^4 d_{4\,0}^{(1)} = B^4$$
$$d_{1\,1}^{(2)} = d_{1\,2}^{(1)} + 2Bd_{2\,1}^{(1)} + 3B^2 d_{3\,0}^{(1)}$$

Wir eliminieren $d_{1\,2}^{(1)}, d_{2\,1}^{(1)}, d_{3\,0}^{(1)} = (2 - 8ie^{-1}g)Y$ aus der Gleichung

$$-2C(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = d_{1\,1}^{(2)}$$

und addieren anschließend das $(-1)(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)e^{-2}$-fache der Gleichung $[X] + 2B[VII]$ hinzu.

$[X] + 2B[VII]$:

$$0 = 2YZ_2 - 2ie^{-2}Z_1^2 + 2Y^2B + 2(2 - 8ie^{-1}g)Z_1B - 4e^{-1}gZ_1s_{2\,2\,0} - 8g^2Bs_{2\,2\,0}$$

Wir erhalten die Gleichung XIII:

XIII $\quad -2C(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = (Z_2 + 2BY)(-4ie^{-2}Z_1 - 4e^{-1}gs_{2\,2\,0}) +$
$(Z_2 + BY)[-2e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Y + 2(2 - 8ie^{-1}g)B] +$
$(2 - 8ie^{-1}g)YB^2 - 2e^{-2}YZ_1s_{2\,2\,0}$

XIV $\quad C^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = B^4$

Bedingungen für Z_{12} und Z_{13}:

Es müssen die Gleichungen I - VIII mit $A_1 = A_3$, $A_1 \neq A_2$ erfüllt sein.
Es liegt genau dann eine Z_{11} - Singularität vor, wenn $d^{(1)}_{0\,1}$ nicht verschwindet.

notwendige Bedingung für Z_{12}:

IX $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$4s_{0\,5\,0} = e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$

notwendige Bedingung für Z_{13}:

X $\quad d^{(1)}_{1\,1} = 0$

$0 = 2YZ_2 - 2ie^{-2}Z_1^2 - 4e^{-1}gZ_1s_{2\,2\,0}$

Ist $d^{(1)}_{0\,2} = Z_2^2 - e^{-2}Z_1^2s_{2\,2\,0} \neq 0$, so sind die Bedingungen I - X hinreichend.

Bedingungen für $T_{2\,5\,5}$ und $T_{2\,5\,6}$:

Damit eine Singularität aus $T_{2\,5\,r}$, $r \geq 5$, vorliegt, müssen die Gleichungen I - VIII mit $A_2 = A_3$, $A_1 \neq A_2$ erfüllt sein.

notwendige Bedingung für $T_{2\,5\,6}$:
Nach eventuellem Vertauschen von A_1 und A_2 können wir o.B.d.A. fordern

X $\quad d^{(1)}_{0\,1} = 0$

$4s_{0\,5\,0} = e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$

V.2.6.3.2 Analyse der Gleichungen

allgemeine Bemerkung:

Bei der nun folgenden Diskussion der Gleichungssysteme führt die Gleichung IV auf die Fallunterscheidung $g = 0$ oder $e = 2ig$ (das heißt $c = 0$ oder $a = ic$). Wenn wir im folgenden das Zeichen $\pm$ bzw. $\mp$ verwenden, so bezieht sich das obere Vorzeichen auf den Fall $g = 0$, das untere auf den Fall $e = 2ig$.

Für die Untersuchung der minimalen guten transversalen Scheiben ist $t_{012} = t_{111} = 0$ zu setzen. Dies ist zu $s_{012} = s_{111} = 0$ äquivalent. Aus der Gültigkeit von I - IV mit $e \neq 0$ folgt dann im

Fall $g = 0$: $\quad f = 0 \quad$ [III]

$Y = 2A_1$

Fall $e = 2ig$: $\quad f = \frac{1}{4}s_{210}e \quad$ [III]

$Y = -2A_1$

$$\underline{U_{16} \xrightarrow{\forall} T_{249}}$$

Wir setzen

$$s_{050} = t_{050} := 1 .$$

Eine Lösung der Gleichungen I - XIV mit den Eigenschaften

$e \neq 0$

A_1, A_2, A_3 paarweise verschieden

heißt zulässige Lösung. Die zu zulässigen Lösungen gehörenden Parameterwerte $(t_{k\ell m})$ der transversalen Scheibe heißen reduzierte zulässige Lösungen.

Das Milnorgitter von $T_{2\,4\,10}$ ist nicht primitiv in das Milnorgitter von U_{16} einbettbar. Deshalb existiert eine

Umgebung U des Parameterteilraumes T^+ der in V.2.6.1 angegebenen transversalen Scheibe, so daß für alle reduzierten zulässigen Lösungen $t \in U$ eine $T_{2\,4\,9}$- Singularität vorliegt.

Im folgenden bestimmen wir die zulässigen Lösungen mit

$$s_{2\,2\,0} = t_{2\,2\,0} = 0$$

(wir untersuchen also T^+). Die Gleichungen I, II, III, V, VI lassen sich nach $s_{0\,3\,0}$, $s_{0\,2\,1}$, $s_{0\,1\,2}$, $s_{0\,4\,0}$, $s_{0\,3\,1}$ auflösen. Wir bestimmen jetzt die Lösungen des folgenden

<u>relevanten Gleichungssystems:</u>

IV $\quad 0 = 4eg - 8ig^2$

VII $\quad (A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Z_1 + Y^2$

VIII $\quad (A_1 - A_2) + (A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Y$

IX $\quad 4 = e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$

X $\quad -2B(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = 2YZ_2 - 2ie^{-2}Z_1^2$

XI $\quad B^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = Z_2^2$

XII $\quad 0 = (Z_2 + YB)\{-4ie^{-2}Z_1B - e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)(Z_2 + YB) + (2 - 8ie^{-1}g)B^2\}$

XIII $\quad 0 = 2C(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) + (Z_2 + 2YB)(-4)ie^{-2}Z_1 + (Z_2 + YB)\{-2e^{-2}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Y + 2(2 - 8ie^{-1}g)B\} + (2 - 8ie^{-1}g)YB^2$

XIV $\quad C^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = B^4$

<u>Diskussion des relevanten Gleichungssystems</u>

Für zulässige Lösungen ist $B \neq 0$ (sonst $Z_2 = 0$ [XI], $Z_1 = 0$ [X], Widerspruch zu [IX]).
Wir substituieren

$$\hat{A}_2^2 = A_1 - A_2$$

$$\hat{A}_3^2 = A_1 - A_3$$

Es folgt

$$g = 0 \quad \text{oder } e = 2ig \qquad [IV]$$

$$Y = \pm 2^{-1}(\hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2) \qquad [VIII]$$

$$Z_1 = \mp 2^{-3}(\hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2)^2 \qquad [VII]$$

$$Z_2 = \pm B\hat{A}_2\hat{A}_3 \qquad [XI] \quad \text{o.B.d.A.}$$

$$B = 2^{-5}ie^{-2}\hat{A}_2^{-1}\hat{A}_3^{-1}(\hat{A}_2 + \hat{A}_3)^2(\hat{A}_2 - \hat{A}_3)^4 \qquad [X]$$

Für zulässige Lösungen gilt

$$\hat{A}_2 + \hat{A}_3 \neq 0 \quad ; \quad \hat{A}_2 - \hat{A}_3 \neq 0$$

$$Z_2 + YB = \pm 2^{-1}B(\hat{A}_2 + \hat{A}_3)^2 \neq 0$$

Es folgt

$$s_{2\,1\,0} + 2iA_1 = i(\hat{A}_2 - \hat{A}_3)^2 + 2^{-3}i\hat{A}_2^{-1}\hat{A}_3^{-1}(\hat{A}_2 - \hat{A}_3)^4 \qquad [XII]$$

$$C = \eta_\pm \hat{A}_2^{-1}\hat{A}_3^{-1}B^2 \quad \text{mit } \eta_\pm \in \{1,-1\} \qquad [XIV]$$

Dabei ist η_+ im Fall $g = 0$, η_- im Fall $e = 2ig$ zu verwenden. Einsetzen in [XIII] ergibt

$$0 = 2^{-3}ie^{-2}B(\hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2)^2 \{2^{-2}\hat{A}_2^{-1}\hat{A}_3^{-1}(\hat{A}_2 + \eta_\pm\hat{A}_3)^2(\hat{A}_2 - \hat{A}_3)^2 + (\hat{A}_2 + \hat{A}_3)^2\}$$

Da der Ausdruck in den geschweiften Klammern verschwinden muß, folgt $\eta_\pm = -1$ für zulässige Lösungen. Es folgt

$$0 = \hat{A}_2^4 + 14\hat{A}_2^2\hat{A}_3^2 + \hat{A}_3^4 = $$
$$= (\hat{A}_2^2 + i\sqrt{12}\hat{A}_2\hat{A}_3 + \hat{A}_3^2)(\hat{A}_2^2 - i\sqrt{12}\hat{A}_2\hat{A}_3 + \hat{A}_3^2)$$

$$e^4 = -2^{-7}i\hat{A}_2\hat{A}_3(\hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2)^4 \qquad [IX]$$

Es seien ε_1, ε_2 die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$\varepsilon^2 + i\sqrt{12}\varepsilon + 1 = 0 .$$

Es ist

$$\varepsilon_1 = i(2 - \sqrt{3}) \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$$

$$\varepsilon_2 = i(-2 - \sqrt{3}) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -i\sqrt{12} \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 4i$$

Im Falle $\hat{A}_2^2 + i\sqrt{12}\hat{A}_2\hat{A}_3 + \hat{A}_3^2 = 0$ können wir o.B.d.A.

$$\hat{A}_2 = \varepsilon_1\hat{A}_3 \;, \quad \hat{A}_2^2 = -2i\varepsilon_1 t^2 \;, \quad \hat{A}_3^2 = -2i\varepsilon_2 t^2 \qquad (t \neq 0)$$

setzen. Im Falle $\hat{A}_2^2 - i\sqrt{12}\hat{A}_2\hat{A}_3 + \hat{A}_3^2 = 0$ machen wir den Ansatz

$$\hat{A}_2 = -\varepsilon_1\hat{A}_3 \;, \quad \hat{A}_2^2 = 2i\varepsilon_1 t^2 \;, \quad \hat{A}_3^2 = 2i\varepsilon_2 t^2 \qquad (t \neq 0).$$

In beiden Fällen ist $e^4 = -64t^{10}$, also $e^2 = 8it^5$ oder $e^2 = -8it^5$.

Sämtliche Lösungen des relevanten Gleichungssystems, die zulässige Lösungen induzieren, können bis auf Vertauschen von $A_1 - A_2$ und $A_1 - A_3$ der folgenden Tabelle entnommen werden. Dabei ist das Vorzeichen für e^2 mit in t hineingezogen worden.

	Fall $g = 0$		Fall $e = 2ig$	
$A_1 - A_2$	$-2i\varepsilon_1 t^2$	$2i\varepsilon_1 t^2$	$-2i\varepsilon_1 t^2$	$2i\varepsilon_1 t^2$
$A_1 - A_3$	$-2i\varepsilon_2 t^2$	$2i\varepsilon_2 t^2$	$-2i\varepsilon_2 t^2$	$2i\varepsilon_2 t^2$
e^2	$8it^5$	$8it^5$	$8it^5$	$8it^5$
Y	$-\sqrt{12}t^2$	$\sqrt{12}t^2$	$\sqrt{12}t^2$	$-\sqrt{12}t^2$
Z_1	$-8t^4$	$-8t^4$	$8t^4$	$8t^4$
Z_2	$(-\sqrt{3}+i)t$	$(\sqrt{3}+i)t$	$(\sqrt{3}-i)t$	$(-\sqrt{3}-i)t$
$s_{210}+2iA_1$	$(-6-i\sqrt{12})t^2$	$(-6+i\sqrt{12})t^2$	$(-6-i\sqrt{12})t^2$	$(-6+i\sqrt{12})t^2$
B	$\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})t^{-1}$	$\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})t^{-1}$	$\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})t^{-1}$	$\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})t^{-1}$
C	$\frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)t^{-4}$	$\frac{1}{4}(-\sqrt{3}+i)t^{-4}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)t^{-4}$	$\frac{1}{4}(-\sqrt{3}+i)t^{-4}$

Berechnet man die zulässigen Lösungen mit $A_1 = f = 0$ für die erste Spalte der Tabelle, so erhält man die im Anhang A.5 angegebene Familie

$$2ix^2z + xz^2 + y^5 + 8it^5x^2 - 2\sqrt{3}t^2xyz - 8t^4xy^2 - 2it^3y^4 - (6 + i2\sqrt{3})t^2x^2y + (\sqrt{3} - 5i)txy^3 - i\sqrt{3}tzy^3 \;.$$

<u>Satz:</u>

(i) Im Parameterteilraum T^+ einer minimalen guten transversalen Scheibe Γ: $T \longrightarrow \mathfrak{m}^2(3)$ von $x^3 + xz^2 + y^5$

zerfällt das $T_{2\,4\,9}$ - Stratum in 6 $\mathbb{C}^*$ - Orbits.

(ii) $x^3 + xz^2 + y^5 + x^2y^2 \xrightarrow[\mu]{} T_{2\,4\,9}$, das heißt $U_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,9}$.

Beweis:

(i) Man berechne die reduzierten zulässigen Lösungen mit

$$t_{1\,1\,1} = t_{0\,1\,2} = 0 \quad \text{(das heißt } s_{1\,1\,1} = s_{0\,1\,2} = 0\text{)}.$$

Man beachte, daß der Fall $a = -ic$ (das heißt $e = 0$) auf den Fall $a = ic$ (das heißt $e = 2ig$) zurückgeführt werden kann.

(ii) Wir setzen $I := J^* - \{(0,5,0),(0,1,2),(1,1,1)\}$. Es ist $|I| = 14$. Wir untersuchen die Familie

$$\mathcal{F}' : \quad x^3 + xz^2 + y^5 + \sum_{(k,\ell,m)\in I} t_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m ,$$

die aus der in V.2.6.1 angegebenen minimalen guten transversalen Scheibe durch $t_{2\,3\,0} := 0$ entsteht.
Nach der Substitution $z \longmapsto z + ix$ geht sie in die Familie

$$\mathcal{G}' : \quad 2ix^2z + xz^2 + y^5 + \sum_{(k,\ell,m)\in I} s_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m$$

über, wobei $(s_{k\,\ell\,m})$ polynomial von $(t_{k\,\ell\,m})$ abhängt.
Wir wenden die Sätze 5 und 6 aus IV.2.2 auf $\mathcal{F}'$ an.
Dabei ist zu beachten, daß der Ansatz

$$(ex + fy + gz)^2 = \sum_{k+\ell+m=2} s_{k\,\ell\,m}\, x^k y^\ell z^m$$

neben den Bedingungen I - XIV noch 6 weitere Bedingungen liefert.
Die zusätzlichen Variablen sind $e, f, g, A_1, A_2, A_3, B, C$. $\square$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2\,4\,7}$

Ziel dieser Rechnung ist es, folgendes Ergebnis zu beweisen

Satz:

Das $T_{2\,4\,7}$ - Stratum im Parameterteilraum T^+ einer minimalen guten transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$, $a_o \in \mathbb{C} - \{0,i,-i\}$, zerfällt für $a_o^2 \neq -\frac{1}{9}$ in 3 $\mathbb{C}^*$ - Orbits, für $a_o = \frac{1}{3}i$, $-\frac{1}{3}i$ in 2 $\mathbb{C}^*$ - Orbits.

Beweis:
Wir setzen

$$t_{2\,2\,0} = t_{0\,5\,0} = 0 \qquad t_{1\,3\,0} = 1$$
$$t_{0\,3\,1} = a_o, \text{ wobei } a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$$

also

$$s_{2\,2\,0} = s_{0\,5\,0} = 0 \qquad s_{1\,3\,0} = 1 + ia_o \qquad s_{0\,3\,1} = a_o$$

Das Milnorgitter von $T_{2\,4\,8}$ läßt sich nicht primitiv in das Milnorgitter von $U_{1,0}$ einbetten. Deshalb liegt für $e \neq 0$ (also $a \neq -ic$) genau dann eine $T_{2\,4\,7}$ - Singularität vor, wenn es eine Lösung der Gleichungen I - XI gibt mit $e \neq 0$; A_1, A_2, A_3 paarweise verschieden. Lösungen mit dieser Eigenschaft heißen zulässige Lösungen.

Die Gleichungen I,II,III,V lassen sich nach $s_{0\,3\,0}$, $s_{0\,2\,1}$, $s_{0\,1\,2}$, $s_{0\,4\,0}$ auflösen. Für die Bestimmung der zulässigen Lösungen untersuchen wir deshalb das folgende

relevante Gleichungssystem:

IV	$0 = 4eg - 8ig^2$
VI	$4a_o = 2e^{-2}YZ_1 + 4e^{-1}g(1 + ia_o)$
VII	$(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Z_1 + Y^2$
VIII	$(A_1 - A_2) + (A_1 - A_3) = (2 - 8ie^{-1}g)Y$
IX	$0 = e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$

X $\quad -2B(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = 2YZ_2 - 2ie^{-2}Z_1^2$

XI $\quad B^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = Z_2^2$

$[Z_2]$ $\quad Z_2 = 1 + ia_o - e^{-2}(s_{2\,1\,o} + 2iA_1)Z_1$

Für zulässige Lösungen ist $Z_1 \neq O$ [IV,VI]
Wir substituieren

$$\hat{A}_2^2 = A_1 - A_2$$

$$\hat{A}_3^2 = A_1 - A_3$$

Für zulässige Lösungen ist $\hat{A}_2 \neq O$, $\hat{A}_3 \neq O$, $\hat{A}_2^2 \neq \hat{A}_3^2$. Es folgt

$g = O$ oder $e = 2ig$ [IV]

$Y = \pm 2^{-1}(\hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2)$ [VIII]

$Z_1 = \mp 2^{-3}(\hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2)^2$ [VII]

$Z_2 = -2^{-1}e^{-2}(s_{2\,1\,o} + 2iA_1)Z_1$ [IX]

$Z_2 = -(1 + ia_o)$ $[Z_2]$

$s_{2\,1\,o} + 2iA_1 = 2e^2(1 + ia_o)Z_1^{-1}$ $[Z_2]$

$B = \pm Z_2\hat{A}_2^{-1}\hat{A}_3^{-1}$ o.B.d.A. [XI]

$e^{-2} = \pm 32i(1 + ia_o)(\hat{A}_2 + \hat{A}_3)^2(\hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2)^{-4}$ [X]

Im Fall $g = O$ folgt aus Gleichung VI

$$\hat{A}_2^2 + 2ia_o\hat{A}_2\hat{A}_3 + \hat{A}_3^2 = O$$

Im Fall $e = 2ig$ folgt aus Gleichung VI

$$(3a_o - i)\hat{A}_2^2 - 2(a_o + i)\hat{A}_2\hat{A}_3 + (3a_o - i)\hat{A}_3^2 = O$$

Wir bestimmen jetzt die Lösungen des relevanten Gleichungssytems, die zulässige Lösungen induzieren.

Fall $g = O$:
Es seien ε_1, ε_2 die beiden Lösungen der Gleichung

$$\varepsilon^2 + 2ia_o\varepsilon + 1 = O.$$

Dann ist

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 \qquad\qquad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -2ia_o \qquad\qquad \varepsilon_1 \neq -\varepsilon_2$$

Wir setzen an $(t \neq 0)$

$$\hat{A}_2 = \varepsilon_1\hat{A}_3 , \quad \hat{A}_2^2 = \varepsilon_1 t , \quad \hat{A}_3^2 = \varepsilon_2 t$$

Fall $e = 2ig$:

Für $a_o = \frac{1}{3}i$ folgt $\hat{A}_2 = 0$ oder $\hat{A}_3 = 0$.
Deshalb existiert keine zulässige Lösung.
Es sei $a_o \neq \frac{1}{3}i$.
Es seien ε_3, ε_4 die beiden Lösungen der Gleichung

$$(3a_o - i)\varepsilon^2 - 2(a_o + i)\varepsilon + (3a_o - i) = 0$$

Es ist

$$\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1 \qquad\qquad \varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$$

$$(3a_o - i)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2(a_o + i) \qquad\qquad \varepsilon_3 \neq -\varepsilon_4$$

Wir machen den Ansatz $(t \neq 0)$

$$\hat{A}_2 = \varepsilon_3\hat{A}_3 , \quad \hat{A}_2^2 = (3a_o - i)\varepsilon_3 t , \quad \hat{A}_3^2 = (3a_o - i)\varepsilon_4 t$$

Die Lösungen des relevanten Gleichungssystems, die zulässige Lösungen induzieren, können bis auf Vertauschen von $A_1 - A_2$ und $A_1 - A_3$ der folgenden Tabelle entnommen werden $(t \neq 0)$

	Fall $g = 0$	Fall $e = 2ig$ $(3a_o \neq i)$
$A_1 - A_2$	$\varepsilon_1 t$	$(3a_o - i)\varepsilon_3 t$
$A_1 - A_3$	$\varepsilon_2 t$	$(3a_o - i)\varepsilon_4 t$
e^2	$-\frac{1}{4}i(1 + a_o^2)t^3$	$4a_o(a_o - i)t^3$
$s_{2\,1\,0} + 2iA_1$	$-i(1 + ia_o)t$	$-2(1 + ia_o)t$
Z_1	$\frac{1}{2}(1 + a_o^2)t^2$	$-4a_o(a_o - i)t^2$
Z_2	$-(1 + ia_o)$	$-(1 + ia_o)$
Y	$-ia_o t$	$-(a_o + i)t$
B	$-(1 + ia_o)t^{-1}$	$(1 + ia_o)(3a_o - i)^{-1}t^{-1}$

Für die Untersuchung des Parameterteilraumes T^+ der in V.2.6.1 angegebenen minimalen guten transversalen Scheibe setzen wir in der Familie $\mathcal{F}^*$ zusätzlich $t_{111} = t_{012} = 0$ voraus.

Nach der Substitution $z \longmapsto z + ix$ geht die Familie $\mathcal{F}^*$ in die Familie $\mathcal{G}$ über. Die Bedingung $t_{111} = t_{012} = 0$ geht dabei in die Bedingung $s_{111} = s_{012} = 0$ über.

Den Bedingungen $c = 0$, $a = ic$, $a = -ic$ entsprechen dabei die neuen Bedingungen $g = 0$, $e = 2ig$, $e = 0$.

Für die Berechnung der $\mathbb{C}^*$ - Orbits in T^+ berechnet man zunächst die Parameterwerte $(t_{k\ell m})$ aus den zulässigen Lösungen mit $s_{111} = s_{012} = 0$. Dabei ist $a + ic \neq 0$, weil $e \neq 0$. Man erhält die beiden Fälle $c = 0$ und $a = ic$.

Die Substitution $z \longmapsto -z$, $t_{k\ell m} \longmapsto (-1)^m t_{k\ell m}$ überführt den Fall $a = -ic$ in den Fall $a = ic$.

Dabei geht $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$ in $x^3 + xz^2 + xy^3 - a_o zy^3$ über.

Für $a_o \neq \frac{1}{3}i$, $-\frac{1}{3}i$ existiert in den drei Fällen $c = 0$, $a = ic$ und $a = -ic$ je genau ein $\mathbb{C}^*$ - Orbit.

Für $a_o = \frac{1}{3}i$ bzw. $a_o = -\frac{1}{3}i$ existiert nur in den Fällen $c = 0$ und $a = -ic$ bzw. $c = 0$ und $a = +ic$ je genau ein $\mathbb{C}^*$ - Orbit. □

<u>Bemerkung:</u>

Berechnet man für den Fall $e = 2ig$ die zulässigen Lösungen mit $A_1 = f = 0$ und anschließend daraus die Parameter $(t_{k\ell m})$, so erhält man die in A.5 angegebene Familie

$$f_t = x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 + a_o(a_o - i)t^3(x - iz)^2 - 2a_o(a_o - i)t^2(x - iz)y^2 - ia_o t(x - iz)^2 y + i(a_o + i)t(x - iz)xy + a_o(a_o - i)ty^4$$

Es ist

$f_t \in T_{247}$ für $a_o \neq \frac{1}{3}i$, $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$, $t \neq 0$

$f_t \in Z_{13}$ für $a_o = \frac{1}{3}i$, $t \neq 0$

$U_{1,0} \longrightarrow Z_{12}, Z_{13}$

Wir setzen

$$t_{220} = t_{050} = 0 \qquad t_{130} = 1$$

$$t_{031} = a_0, \text{ wobei } a_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } a_0(a_0^2+1) \neq 0,$$

das heißt wir untersuchen den Parameterteilraum T^+ der in V.2.6.1 angegebenen transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_0 zy^3$. Dann ist

$$s_{220} = s_{050} = 0 \qquad s_{031} = a_0 \qquad s_{130} = 1 + ia_0 .$$

Wir setzen $A_1 = A_3$.
Es liegt für $e \neq 0$ genau dann eine Z_{12} - Singularität vor, wenn die Gleichungen I - IX mit $e \neq 0$, $A_1 \neq A_2$ erfüllt sind und wenn Gleichung X verletzt ist.
Für $e \neq 0$ liegt genau dann eine Z_{13} - Singularität vor, wenn die Gleichungen I - X mit $e \neq 0$, $A_1 \neq A_2$ erfüllt sind und $d^{(1)}_{02} \neq 0$ gilt.

Eine Lösung der Gleichungen I - IX mit $e \neq 0$, $A_1 = A_3$ und $A_1 \neq A_2$ heißt zulässige Lösung. Die Gleichungen I, II, III, V lassen sich nach s_{030}, s_{021}, s_{012}, s_{040} auflösen.
Wir untersuchen jetzt das folgende

<u>relevante Gleichungssystem:</u>

IV	$0 = 4eg - 8ig^2$
VI	$4a_0 = 2e^{-2}YZ_1 + 4e^{-1}g(1+ia_0)$
VII	$0 = Y^2 + (2 - 8ie^{-1}g)Z_1$
VIII	$A_1 - A_2 = (2 - 8ie^{-1}g)Y$
IX	$0 = e^{-4}(s_{210} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$
X	$0 = 2Y\dot{Z}_2 - 2ie^{-2}Z_1^2$
$[Z_2]$	$Z_2 = 1 + ia_0 - e^{-2}(s_{210} + 2iA_1)Z_1$
$[d^{(1)}_{02}]$	$d^{(1)}_{02} = Z_2^2$

Diskussion des relevanten Gleichungssystems:

Es ist $Z_1 \neq 0$ für zulässige Lösungen. [VII,VIII]
Es folgt

$$g = 0 \quad \text{oder } e = 2ig \qquad [IV]$$

$$Y = \pm 2^{-1}(A_1 - A_2) \qquad [VIII]$$

$$Z_1 = \mp 2^{-3}(A_1 - A_2)^2 \qquad [VII]$$

$$Z_2 = -(1 + ia_o) \qquad [IX, Z_2]$$

$$s_{2\,1\,0} + 2iA_1 = 2e^2(1 + ia_o)Z_1^{-1} \qquad [IX, Z_2]$$

Fall $g = 0$: (dem entspricht $c = 0$)

$$e^2 = -2^{-5}a_o^{-1}(A_1 - A_2)^3 \qquad [VI]$$

Gleichung X ist für zulässige Lösungen nicht erfüllbar.

Fall $e = 2ig$: (dem entspricht $a = ic$)

$$e^2 = -2^{-4}(a_o + i)^{-1}(A_1 - A_2)^3 \qquad [VI]$$

Gleichung X ist für zulässige Lösungen genau dann erfüllt, wenn $a_o = \frac{1}{3}i$.
Es ist $d_{0\,2}^{(1)} \neq 0$ für zulässige Lösungen.

Die Lösungen des relevanten Gleichungssystems, die zulässige Lösungen induzieren, können folgender Tabelle entnommen werden ($t \neq 0$):

	$g = 0$	$e = 2ig$
$A_1 - A_2$	$-4a_o t$	$2(a_o + i)t$
Y	$-2a_o t$	$-(a_o + i)t$
Z_1	$-2a_o^2 t^2$	$2^{-1}(a_o + i)^2 t^2$
Z_2	$-(1 + ia_o)$	$-(1 + ia_o)$
e^2	$2a_o^2 t^3$	$-2^{-1}(a_o + i)^2 t^3$
$s_{2\,1\,0} + 2iA_1$	$-2(1 + ia_o)t$	$-2(1 + ia_o)t$

Für die Untersuchung, für welche a_o

$$x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 \xrightarrow[\mu]{} Z_{13},$$

genügt es auf Grund von II.2.4.5 den Teilraum T^+ der transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$ zu untersuchen. In der vorangegangenen Rechnung war $e = a + ic \neq 0$ vorausgesetzt. Der Fall $a = -ic$ kann durch die Substitution $z \longmapsto -z$ in den Fall $a = ic$ überführt werden. Dabei geht $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$ in $x^3 + xz^2 + xy^3 - a_o zy^3$ über. Wir erhalten als Ergebnis

<u>Satz:</u>

(i) $U_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{12}$

(ii) Für $a_o \in \mathbb{C}$ mit $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$ gilt

$$x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 \xrightarrow[\mu]{} Z_{13}$$

genau dann, wenn $3a_o = i$ oder $3a_o = -i$.

(iii) Die Anzahl der $\mathbb{C}^*$-Orbits in den Strata für die Singularitäten Z_{12}, Z_{13} in einer minimalen guten transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$, $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$, ist in der folgenden Tabelle angegeben:

	Z_{12}	Z_{13}
$9a_o^2 \neq -1$	3	0
$9a_o^2 = -1$	2	1

□

<u>Bemerkung:</u>

Die Berechnung der Parameter $(t_{k\ell m})$ für den Fall $a = ic$ aus den zulässigen Lösungen mit $A_1 = f = 0$ ergibt die in A.5 angegebene Familie

$$\begin{aligned} f_t = {} & x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 - 2^{-3}(a_o + i)^2 t^3 (x - iz)^2 + \\ & 2^{-2}(a_o + i)^2 t^2 (x - iz) y^2 - i a_o t (x - iz)^2 y + i(a_o + i) t (x - iz) xy \\ & -2^{-3}(a_o + i)^2 t y^4 \end{aligned}$$

Es ist $f_t \in Z_{12}$ für $t \neq 0$, $a_o \neq \frac{1}{3}i$, $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$

$f_t \in Z_{13}$ für $t \neq 0$, $a_o = \frac{1}{3}i$

$$\underline{\text{nicht } (U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2\,5\,6})}$$

Wir setzen $t_{0\,5\,0} = 1$, also $s_{0\,5\,0} = 1$.
In dieser Rechnung wird $t_{2\,2\,0}$ nicht Null gesetzt.
Damit für $e \neq 0$ eine $T_{2\,5\,6}$ - Singularität vorliegt, muß eine Lösung der Gleichungen I - IX mit $e \neq 0$, $A_2 = A_3$, $A_1 \neq A_2$ existieren. Eine solche Lösung heißt zulässige Lösung.

Wenn sich die quasihomogene Singularität aus U_{16} in $T_{2\,5\,6}$ μ - vereinfacht, muß es zu beliebigem $\eta > 0$ zulässige Lösungen mit

$$|e|, |f|, |g| < \eta$$

$$|s_{k\,\ell\,m}| < \eta \quad \text{für } (k,\ell,m) \in J^* - \{(0,5,0)\}$$

geben.
Auf Grund des Ansatzes

$$u^4 + d_{3\,1}u^3v + d_{2\,2}u^2v^2 + d_{1\,3}uv^3 + d_{0\,4}v^4 = (u - A_1v)^2(u - A_2v)^2$$

(siehe V.2.6.3.1) können wir o.B.d.A.

$$|A_1|, |A_2| < \eta$$

fordern.
Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

IV $\quad 0 = 4eg - 8ig^2$

VII $\quad (A_1 - A_2)^2 = (2 - 8ie^{-1}g)Z_1 + Y^2 - 4g^2s_{2\,2\,0}$

VIII $\quad 2(A_1 - A_2) = (2 - 8ie^{-1}g)Y$

IX $\quad 4 = e^{-4}(s_{2\,1\,0} + 2iA_1)Z_1^2 + 2e^{-2}Z_1Z_2$

Wir bemerken noch, daß

$$d_{0\,2}^{(1)} = d_{0\,6} + A_1d_{1\,5} = Z_2^2 - e^{-2}Z_1^2s_{2\,2\,0}$$

auf Grund von Gleichung IX gilt.
Für zulässige Lösungen folgt

$g = 0$ oder $e = 2ig$ $\quad$ [IV]

$Y = \pm(A_1 - A_2)$ $\quad$ [VIII]

$Z_1 = \pm 2g^2s_{2\,2\,0}$ $\quad$ [VII]

Fall $g = 0$:

Es ist $Z_1 = 0$.

Gleichung IX ist nicht erfüllbar.

Fall $e = 2ig$:

Es ist $Z_1 = \frac{1}{2}e^2 s_{220}$.

$$(*) \qquad 4 = \frac{1}{4}(s_{210} + 2iA_1)s_{220}^2 + Z_2 s_{220} \qquad [IX]$$

$$(**) \qquad Z_2^2 = d_{06} + A_1 d_{15} + 4^{-1}e^2 s_{220}^3$$

Auf Grund der Definitionen von d_{06} und d_{15} können wir wegen (**) o.B.d.A. $|Z_2| < \eta$ verlangen.

Für genügend kleines η ist dann (*) nicht erfüllt.

Aus der obigen Rechnung folgt dann $x^3 + xz^2 + y^5 \underset{\mu}{\not\longrightarrow} T_{256}$, wenn man beachtet

(i) Der Fall $e = 0$ (dem entspricht $a = -ic$) kann in den Fall $e = 2ig$ (dem entspricht $a = ic$) überführt werden.

(ii) Bei der Untersuchung der in V.2.6.1 angegebenen transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + y^5$ kann auf Grund des Resultates von Wirthmüller o.B.d.A. $t_{230} = 0$ gesetzt werden. $\square$

nicht $(U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{255})$

Wir setzen

$$t_{220} = t_{050} = 0 \qquad t_{130} = 1 \qquad t_{031} = a_0$$

wobei $a_0(a_0^2 + 1) \neq 0$. Dann gilt

$$s_{220} = s_{050} = 0 \qquad s_{031} = a_0 \qquad s_{130} = 1 + ia_0$$

Eine Lösung des Gleichungssystems I - VIII mit $e \neq 0$, $A_2 = A_3$ und $A_1 \neq A_2$ heißt zulässige Lösung. Damit für $e \neq 0$ eine T_{255} - Singularität vorliegen kann, muß eine zulässige Lösung der Gleichungen I - VIII existieren. Wir untersuchen jetzt die Lösungen der folgenden Gleichungen:

IV	$0 = 4eg - 8ig^2$
VI	$4a_o = 2e^{-2}YZ_1 + 4e^{-1}g(1 + ia_o)$
VII	$(A_1 - A_2)^2 = (2 - 8ie^{-1}g)Z_1 + Y^2$
VIII	$2(A_1 - A_2) = (2 - 8ie^{-1}g)Y$

Es folgt

$g = 0$ oder $e = 2ig$	[IV]
$Y = \pm(A_1 - A_2)$	[VIII]
$Z_1 = 0$	[VII]

Gleichung VI zeigt, daß keine zulässigen Lösungen existieren. Es folgt

$$x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3 \underset{\mu}{\not\longrightarrow} T_{2\,5\,5}$$

für $a_o(a_o^2 + 1) \neq 0$, wenn man beachtet:

(i) Der Fall $e = 0$ (dem entspricht $a = -ic$) kann in den Fall $e = 2ig$ (dem entspricht $a = ic$) überführt werden.

(ii) Auf Grund von II.2.4.5 genügt es, den T^+- Teilraum der in V.2.6.1 angegebenen transversalen Scheibe von $x^3 + xz^2 + xy^3 + a_o zy^3$ zu untersuchen.

$\square$

ANHANG A

Anhang A.1

Liste der Normalformen

Klasse	Normalform	Einschränkungen	μ	quasihomogener Typ
[0]	**Die einfachen Singularitäten**			
A_k $(k\geq 1)$	$x^{k+1}+y^2$		k	$(2,k+1;2(k+1))$
D_k $(k\geq 4)$	x^2y+y^{k-1}		k	$(k-2,2;2(k-1))$
E_6	x^3+y^4		6	$(4,3;12)$
E_7	x^3+xy^3		6	$(3,2;9)$
E_8	x^3+y^5		8	$(5,3;15)$
[1.1]	**Die unimodulare Serie $T_{i\,j\,k}$**			
[1.1.1]	**Die Klassen parabolischer Singularitäten**			
$T_{3\,3\,3}$	$x^3+y^3+z^3+axyz$	$a^3+27\neq 0$	8	$(1,1,1;3)$
$T_{2\,4\,4}$	$x^4+y^4+ax^2y^2$	$a^2\neq 4$	9	$(1,1;4)$
$T_{2\,3\,6}$	$x^3+y^6+ax^2y^2$	$4a^3+27\neq 0$	10	$(2,1;6)$
[1.1.2]	**Die Klassen hyperbolischer Singularitäten**			
$T_{2\,j\,k}$ $(1/j+1/k<1/2)$	$x^j+y^k+ax^2y^2$	$a\neq 0$	$j+k+1$	
$T_{i\,j\,k}$ $(1/i+1/j+1/k<1,\ i>2)$	$x^i+y^j+z^k+axyz$	$a\neq 0$	$i+j+k-1$	
[1.2]	**Die exzeptionellen unimodularen Klassen**			
E_{12}	$x^3+y^7+axy^5$		12	$(7,3;21)$
E_{13}	$x^3+xy^5+ay^8$		13	$(5,2;15)$
E_{14}	$x^3+y^8+axy^6$		14	$(8,3;24)$
Z_{11}	$x^3y+y^5+axy^4$		11	$(4,3;15)$
Z_{12}	$x^3y+xy^4+ax^2y^3$		12	$(3,2;11)$
Z_{13}	$x^3y+y^6+axy^5$		13	$(5,3;18)$

Klasse	Normalform	Einschränkungen	μ	quasihomogener Typ
Q_{10}	$x^3+y^4+yz^2+axy^3$		10	(8,6,9;24)
Q_{11}	$x^3+yz^2+xy^3+ay^5$		11	(6,4,7;18)
Q_{12}	$x^3+y^5+yz^2+axy^4$		12	(5,3,6;15)
W_{12}	$x^4+y^5+ax^2y^3$		12	(5,4;20)
W_{13}	$x^4+xy^4+ay^6$		13	(4,3;16)
S_{11}	$x^4+yz^2+xy^2+ax^3y$		11	(4,6,5;16)
S_{12}	$x^2z+yz^2+xy^3+ay^5$		12	(4,5,3;13)
U_{12}	$x^3+y^3+z^4+axyz^2$		12	(4,4,3;12)

[2.1] <u>Die bimodularen Serien</u> *)

[2.1.1]

$J_{3,0}$	$x^3+y^9+a_0x^2y^3+a_1xy^7$	$4a_0^3+27 \neq 0$	16	(3,1;9)
$Z_{1,0}$	$x^3y+y^7+a_0x^2y^3+a_1xy^6$	$4a_0^3+27 \neq 0$	15	(2,1;7)
$Q_{2,0}$	$x^3+yz^2+xy^4+\underline{a}x^2y^2$	$a_0^2 \neq 4$	14	(4,2,5;12)
$W_{1,0}$	$x^4+y^6+\underline{a}x^2y^3$	$a_0^2 \neq 4$	15	(3,2;12)
$S_{1,0}$	$x^2z+yz^2+y^5+\underline{a}y^3z$	$a_0^2 \neq 4$	14	(3,2,4;10)
$U_{1,0}$	$x^3+xz^2+xy^3+\underline{a}y^3z$	$a_0(a_0^2+1) \neq 0$	14	(3,2,3;9)

[2.1.2]

$J_{3,i}$ (i>0)	$x^3+x^2y^3+\underline{a}y^{9+i}$	$a_0 \neq 0$	16+i	
$Z_{1,i}$ (i>0)	$x^3y+x^2y^3+\underline{a}y^{7+i}$	$a_0 \neq 0$	15+i	
$Q_{2,i}$ (i>0)	$x^3+yz^2+x^2y^2+\underline{a}y^{6+i}$	$a_0 \neq 0$	14+i	
$W_{1,i}$ (i>0)	$x^4+x^2y^3+\underline{a}y^{6+i}$	$a_0 \neq 0$	15+i	
$W^{\#}_{1,2j-1}$ (j>0)	$(x^2+y^3)^2+\underline{a}xy^{4+j}$	$a_0 \neq 0$	15+2j-1	
$W^{\#}_{1,2j}$ (j>0)	$(x^2+y^3)^2+\underline{a}x^2y^{3+j}$	$a_0 \neq 0$	15+2j	
$S_{1,i}$ (i>0)	$x^2z+yz^2+x^2y^2+\underline{a}y^{5+i}$	$a_0 \neq 0$	14+i	

Klasse	Normalform	Einschränkungen	μ	quasihomogener Typ
$S^{\#}_{1,2j-1}$ $(j>0)$	$x^2z+yz^2+y^3z+\underline{a}xy^{3+j}$	$a_0 \neq 0$	$14+2j-1$	
$S^{\#}_{1,2j}$ $(j>0)$	$x^2z+yz^2+y^3z+\underline{a}x^2y^{2+j}$	$a_0 \neq 0$	$14+2j$	
$U_{1,2j-1}$ $(j>0)$	$x^3+xz^2+xy^3+\underline{a}y^{1+j}z^2$	$a_0 \neq 0$	$14+2j-1$	
$U_{1,2j}$ $(j>0)$	$x^3+xz^2+xy^3+\underline{a}y^{3+j}z$	$a_0 \neq 0$	$14+2j$	

[2.2] Die exzeptionellen bimodularen Klassen *)

E_{18}	$x^3+y^{10}+\underline{a}xy^7$		18	(10,3;30)
E_{19}	$x^3+xy^7+\underline{a}y^{11}$		19	(7,2;21)
E_{20}	$x^3+y^{11}+\underline{a}xy^8$		20	(11,3;33)
Z_{17}	$x^3y+y^8+\underline{a}xy^6$		17	(7,3;24)
Z_{18}	$x^3y+xy^6+\underline{a}y^9$		18	(5,2;17)
Z_{19}	$x^3y+y^9+\underline{a}xy^7$		19	(8,3;27)
Q_{16}	$x^3+yz^2+y^7+\underline{a}xy^5$		16	(7,3,9;21)
Q_{17}	$x^3+yz^2+xy^5+\underline{a}y^8$		17	(10,4,13;30)
Q_{18}	$x^3+yz^2+y^8+\underline{a}xy^6$		18	(16,6,21;48)
W_{17}	$x^4+xy^5+\underline{a}y^7$		17	(5,3;20)
W_{18}	$x^4+y^7+\underline{a}x^2y^4$		18	(7,4;28)
S_{16}	$x^2z+yz^2+xy^4+\underline{a}y^6$		16	(5,3,7;17)
S_{17}	$x^2z+yz^2+y^6+\underline{a}y^4z$		17	(7,4,10;24)
U_{16}	$x^3+xz^2+y^5+\underline{a}x^2y^2$		16	(5,3,5;15)

*) Es sei $\underline{a} := a_0 + a_1 y$

Tabelle der Vereinfachungsergebnisse zu den Theoremen 1 und 2 aus Kapitel III

Y \ X	$J_{3,0}$	E_{18}	E_{19}	E_{20}	$Z_{1,0}$	Z_{17}	Z_{18}	Z_{19}	$Q_{2,0}$	Q_{16}	Q_{17}	Q_{18}	$W_{1,0}$	W_{17}	W_{18}	$S_{1,0}$	S_{16}	S_{17}	$U_{1,0}$	U_{16}
$U_{1,1}$																				X
$U_{1,0}$																				X
U_{12}																			X	X
S_{16}																		X		
$S^{\#}_{1,2}$																		X		
$S^{\#}_{1,1}$																	X	X		
$S_{1,2}$																		X		
$S_{1,1}$																	X	X		X
$S_{1,0}$																	X	X		X
S_{12}																X	X	X	X	X
S_{11}																X	X	X	X	X
W_{17}															X					
$W^{\#}_{1,2}$															X					
$W^{\#}_{1,1}$														X	X					
$W_{1,2}$															X					
$W_{1,1}$														X	X			X		
$W_{1,0}$														X	X			X		
W_{13}													X	X	X		X	X		
W_{12}													X	X	X	X	X	X		X
Q_{17}												X								
Q_{16}											X	X						X		
$Q_{2,3}$												X								
$Q_{2,2}$											X	X								
$Q_{2,1}$										X	X	X					X	X		
$Q_{2,0}$										X	X	X					X	X		X
Q_{12}									X	X	X	X				X	X	X	X	X
Q_{11}									X	X	X	X				X	X	X	X	X
Q_{10}									X	X	X	X				X	X	X	X	X
Z_{18}								X												
Z_{17}							X	X							X					
$Z_{1,3}$								X												
$Z_{1,2}$							X	X												
$Z_{1,1}$						X	X	X						X	X			X		
$Z_{1,0}$						X	X	X						X	X			X		
Z_{13}					X	X	X	X					X	X	X		X	X	☆	X
Z_{12}					X	X	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X
Z_{11}					X	X	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X
E_{19}				X																
E_{18}			X	X				X												
$J_{3,3}$				X																
$J_{3,2}$			X	X																
$J_{3,1}$		X	X	X			X	X				X								
$J_{3,0}$		X	X	X			X	X				X								
E_{14}	X	X	X	X		X	X	X		X	X	X	☆	X	X		X	X		X
E_{13}	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	☆	X	X		X
E_{12}	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

X: $X \xrightarrow{\forall} Y$
☆: $X \xrightarrow{\exists} Y$, ABER NICHT: $X \xrightarrow{\forall} Y$

$$X \xrightarrow{\forall} T_{P,Q,R}$$

X	(P,Q,R) ≤
U_{16}	(5,5,5); (4,4,7); (2,4,9)
$U_{1,0}$	(4,4,5); (3,4,6); (2,4,7); (2,3,8)
S_{17}	(3,6,6); (3,5,8); (3,4,9); (2,5,9); (2,3,10)
S_{16}	(3,5,7); (3,4,8); (2,4,9); (2,5,8)
$S_{1,0}$	(3,5,5); (3,4,6); (3,3,7); (2,3,8)
W_{18}	(2,7,7); (2,6,9); (2,5,10); (2,3,12)
W_{17}	(2,6,8); (2,5,9); (2,3,11)
$W_{1,0}$	(2,6,6); (2,5,7); (2,4,8); (2,3,9)
Q_{18}	(3,3,11)
Q_{17}	(3,3,10); (2,3,11)
Q_{16}	(3,3,9)
$Q_{2,0}$	(3,3,7)
Z_{19}	(2,4,12); (2,3,13)
Z_{18}	(2,4,11); (2,3,12)
Z_{17}	(2,4,10); (2,3,11)
$Z_{1,0}$	(2,4,8)
E_{20}	(2,3,14)
E_{19}	(2,3,13)
E_{18}	(2,3,12)
$J_{3,0}$	(2,3,10)

$U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,9}$, ABER NICHT: $U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,9}$

Anhang A.3 Die von Laufer bestimmten Vereinfachungen uni- und bimodularer Singularitäten

Die folgenden Tabellen sind der Arbeit [Lau 3] entnommen.
(Vergleiche auch Kapitel II.1.2)
Z·Z bezeichnet die Selbstschnittzahl des Fundamentalzykels.

$Z \cdot Z = -1$

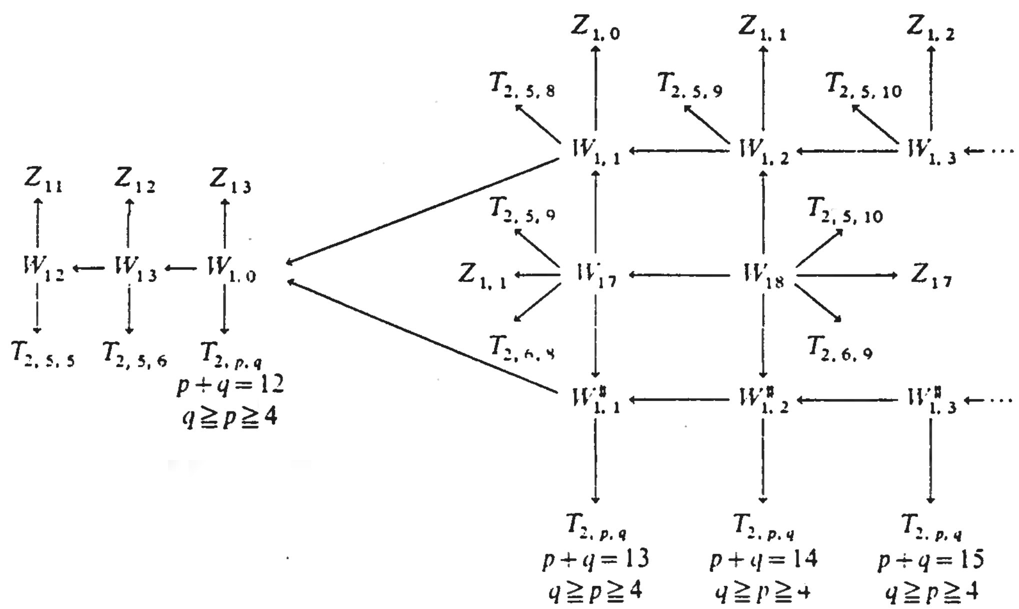
$J_{10} = T_{2,3,6}$

$$\begin{tikzcd}
T_{2,3,6} & T_{2,3,7} \arrow[l] & T_{2,3,8} \arrow[l] & T_{2,3,9} \arrow[l] & T_{2,3,10} \arrow[l] & T_{2,3,11} \arrow[l] & T_{2,3,12} \arrow[l] & T_{2,3,13} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
 & E_{12} \arrow[u] & E_{13} \arrow[u] \arrow[l] & E_{14} \arrow[u] \arrow[l] & J_{3,0} \arrow[u] \arrow[l] & J_{3,1} \arrow[u] \arrow[l] & J_{3,2} \arrow[u] \arrow[l] & J_{3,3} \arrow[u] \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & & & E_{18} \arrow[u] \arrow[d] & E_{19} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[d] & E_{20} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[d] & \\
 & & & & & T_{2,3,12} & T_{2,3,13} & T_{2,3,14} &
\end{tikzcd}$$

$Z \cdot Z = -2$

$X_9 = T_{2,4,4}$ $\quad T_{2,p,q} \leftarrow T_{2,r,s}$ with $r \geqq p \geqq 4$ and $s \geqq q \geqq 4$, $(p,q) \neq (r,s)$.

$$\begin{tikzcd}
T_{2,4,5} & T_{2,4,6} & T_{2,4,7} & T_{2,4,8} & T_{2,4,9} & T_{2,4,10} & T_{2,4,11} & \\
Z_{11} \arrow[u] & Z_{12} \arrow[u] \arrow[l] & Z_{13} \arrow[u] \arrow[l] & Z_{1,0} \arrow[u] \arrow[l] & Z_{1,1} \arrow[u] \arrow[l] & Z_{1,2} \arrow[u] \arrow[l] & Z_{1,3} \arrow[u] \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & & Z_{17} \arrow[u] \arrow[d] & Z_{18} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[d] & Z_{19} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[d] & \\
 & & & & T_{2,4,10} & T_{2,4,11} & T_{2,4,12} &
\end{tikzcd}$$



$Z\cdot Z=-3$

$P_8=T_{3,3,3}\quad T_{p,q,r}\leftarrow T_{s,t,u}$ with $s\geqq p\geqq 3,\ t\geqq q\geqq 3,\ u\geqq r\geqq 3$ and $(p,q,r)\neq(s,t,u)$

$$\begin{tikzcd}
T_{3,3,4} & T_{3,3,5} & T_{3,3,6} & T_{3,3,7} & T_{3,3,8} & T_{3,3,9} & T_{3,3,10} & \\
Q_{10} \arrow[u] & Q_{11} \arrow[l] \arrow[u] & Q_{12} \arrow[l] \arrow[u] & Q_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & Q_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & Q_{2,2} \arrow[l] \arrow[u] & Q_{2,3} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & & Q_{16} \arrow[u] \arrow[d] & Q_{17} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & Q_{18} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & & & & T_{3,3,9} & T_{3,3,10} & T_{3,3,11} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & Q_{2,0} & & Q_{2,1} & & Q_{2,2} & \\
 & & & T_{3,4,7} & & T_{3,4,8} & & T_{3,4,9} & & \\
 & & & & S_{1,1} \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[ddll] & & S_{1,2} \arrow[ll] \arrow[u] \arrow[ul] & & S_{1,3} \arrow[ll] \arrow[u] \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] \\
Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} & T_{3,5,7} & & & & T_{3,5,8} & & \\
S_{11} \arrow[u] \arrow[dd] & S_{12} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dd] & S_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dd] & Q_{2,1} & S_{16} \arrow[uu] \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[dd] & & S_{17} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & Q_{16} & \\
 & & & T_{3,4,8} & & & & T_{3,4,9} & & \\
T_{3,4,4} & T_{3,4,5} & \begin{array}{c} T_{3,p,q} \\ p+q=10 \\ q\geqq p\geqq 3 \end{array} & & S^{\#}_{1,1} \arrow[uull] \arrow[d] & & S^{\#}_{1,2} \arrow[ll] \arrow[d] & & S^{\#}_{1,3} \arrow[ll] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & & \begin{array}{c} T_{3,p,q} \\ p+q=11 \\ q\geqq p\geqq 3 \end{array} & & \begin{array}{c} T_{3,p,q} \\ p+q=12 \\ q\geqq p\geqq 3 \end{array} & & \begin{array}{c} T_{3,p,q} \\ p+q=13 \\ q\geqq p\geqq 3 \end{array} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & S_{1,1} & & & & & \\
 & & & & T_{4,4,7} & & T_{5,5,5} & & & & \\
S_{11} & & S_{12} & & S_{1,0} & U_{16} \arrow[uu] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[ddl] & & S^{\#}_{1,1} & & S^{\#}_{1,2} & \\
 & Q_{12} & & & & & & & & & \\
U_{12} \arrow[uu] \arrow[dd] & & U_{1,0} \arrow[ll] \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[dl] \arrow[dd] & & U_{1,1} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[dl] \arrow[dd] & & & U_{1,2} \arrow[lll] \arrow[uu] \arrow[dl] \arrow[dd] & & U_{1,3} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[dl] \arrow[dd] & \cdots \arrow[l] \\
 & T_{3,4,6} & & T_{3,4,7} & & & T_{3,4,8} & & T_{3,4,9} & & \\
T_{4,4,4} & & T_{4,4,5} & & \begin{array}{c} T_{4,p,q} \\ p+q+10 \\ q\geqq p\geqq 4 \end{array} & & & \begin{array}{c} T_{4,p,q} \\ p+q=11 \\ q\geqq p\geqq 4 \end{array} & & \begin{array}{c} T_{4,p,q} \\ p+q=12 \\ q\geqq p\geqq 4 \end{array} &
\end{tikzcd}$$

Anhang A.4

Die Relationen $L(Y) \longrightarrow L(X)$, $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}_s(Y) \leq_s \mathcal{D}_s(X)$ und $Spec(X) \longrightarrow Spec(Y)$.

Legende (Zu den Bezeichnungen vergleiche II.2.3):

Y	X
Y	(leer): $L(Y) \not\longrightarrow L(X)$
Y	+ : $L(Y) \longrightarrow L(X)$
Y	□ : $\mathcal{D}_s(Y) \leq_s \mathcal{D}_s(X)$
Y	■ : $\mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X)$
Y	. : $L(Y) \not\longrightarrow L(X)$ bzw. $L(Y) \longrightarrow L(X)$ wird in V.1. bewiesen.
Y	(leer): $Spec(X) \not\longrightarrow Spec(Y)$
Y	X : $Spec(X) \longrightarrow Spec(Y)$
Y	(dicker Strich oben): beschreibt von Laufer und uns bestimmte Vereinfachungen $X \longrightarrow Y$. Diese geben wir an, um einen Vergleich mit den Tabellen A.2 und A.3 zu erleichtern.

	$J_{3,0}$	$J_{3,1}$	$J_{3,2}$	$J_{3,3}$	$J_{3,4}$	E_{18}	E_{19}	E_{20}
E_{20}								■ X
E_{19}							■ X	■ X
E_{18}					.	■ X	■ X	■ X
$J_{3,4}$					■ X			
$J_{3,3}$				■ X	■ X			■ X
$J_{3,2}$			■ X	■ X	■ X		■ X	■ X
$J_{3,1}$		■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$J_{3,0}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
E_{14}	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
E_{13}	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
E_{12}	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,15}$					.			.
$T_{2,3,14}$				.	■ X		. X	■ X
$T_{2,3,13}$			.	■ X	■ X	.	■ X	■ X
$T_{2,3,12}$		.	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,11}$	.	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,10}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,9}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,8}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,7}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X
$T_{2,3,6}$	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X	■ X

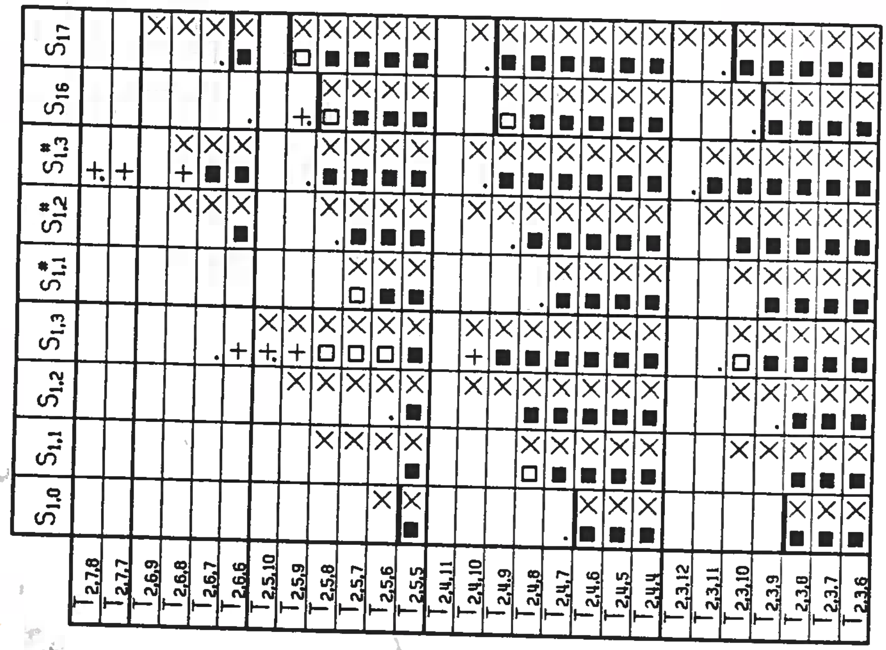
	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$Z_{1,2}$	$Z_{1,3}$	$Z_{1,4}$	Z_{17}	Z_{18}	Z_{19}
Z_{19}								■ ×
Z_{18}							■ ×	■ ×
Z_{17}					.	■ ×	■ ×	■ ×
$Z_{1,4}$					■ ×			
$Z_{1,3}$				■ ×	■ ×			■ ×
$Z_{1,2}$			■ ×	■ ×	■ ×		■ ×	■ ×
$Z_{1,1}$		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$Z_{1,0}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{19}								□
E_{18}					.			■ ×
$J_{3,2}$					■ ×		□	□
$J_{3,1}$				■ ×	■ ×		■ ×	■ ×
$J_{3,0}$			■ ×	■ ×	■ ×	.	■ ×	■ ×
E_{14}	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,13}$					.			.
$T_{2,4,12}$					■ ×		.	■ ×
$T_{2,4,11}$				■ ×	■ ×	.	■ ×	■ ×
$T_{2,4,10}$		.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,9}$		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,8}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,14}$					. ×			. ×
$T_{2,3,13}$					.+ ×		. ×	□ ×
$T_{2,3,12}$				.	■ ×	.+ ×	□ ×	■ ×
$T_{2,3,11}$			. ×	■ ×	■ ×	□ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,10}$		□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,9}$	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,8}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

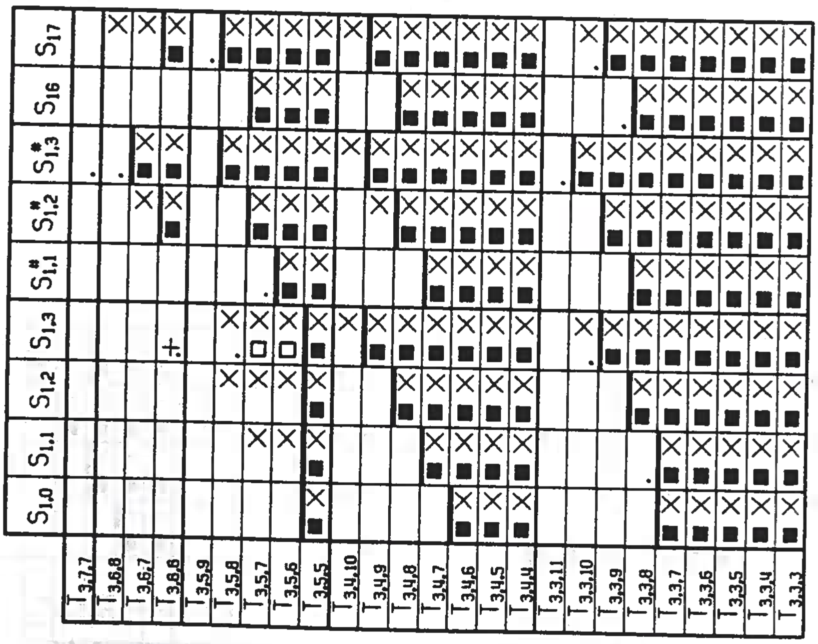
	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{2,4}$	Q_{16}	Q_{17}	Q_{18}
Q_{18}								■ ×
Q_{17}							■ ×	■ ×
Q_{16}					.	■ ×	■ ×	■ ×
$Q_{2,4}$					■ ×			
$Q_{2,3}$				■ ×	■ ×			■ ×
$Q_{2,2}$			■ ×	■ ×	■ ×		■ ×	■ ×
$Q_{2,1}$		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$Q_{2,0}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{10}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{18}								□
$J_{3,1}$					■ ×			■ ×
$J_{3,0}$				■ ×	■ ×		.	■ ×
E_{14}		.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{13}	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,12}$					.			.
$T_{3,3,11}$					■ ×		.	■ ×
$T_{3,3,10}$			.	■ ×	■ ×	×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,9}$			■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,8}$		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,3}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,14}$								
$T_{2,3,13}$					.			. ×
$T_{2,3,12}$				×	.+ ×		.+ ×	□ ×
$T_{2,3,11}$				. ×	■ ×		+ ×	■ ×
$T_{2,3,10}$			.+ ×	■ ×	■ ×	. ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,9}$		. ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,8}$	. ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$W_{1,0}$	$W_{1,1}$	$W_{1,2}$	$W_{1,3}$	$W^*_{1,1}$	$W^*_{1,2}$	$W^*_{1,3}$	W_{17}	W_{18}
W_{18}									■ ×
W_{17}								■ ×	■ ×
$W^*_{1,3}$							■ ×		
$W^*_{1,2}$						■ ×	■ ×		■ ×
$W^*_{1,1}$				.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$W_{1,3}$				■ ×					
$W_{1,2}$			■ ×	■ ×					■ ×
$W_{1,1}$		■ ×	■ ×	■ ×		×	. ×	■ ×	■ ×
$W_{1,0}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
W_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
W_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{18}									
Z_{17}				.			□		■ ×
$Z_{1,3}$									
$Z_{1,2}$				■ ×			.		.
$Z_{1,1}$			■ ×	■ ×			□	■ ×	■ ×
$Z_{1,0}$		■ ×	■ ×	■ ×		. ×	□ ×	■ ×	■ ×
Z_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$J_{3,2}$									
$J_{3,1}$				.					
$J_{3,0}$				■ ×			.		.
E_{14}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$W_{1,0}$	$W_{1,1}$	$W_{1,2}$	$W_{1,3}$	$W^*_{1,1}$	$W^*_{1,2}$	$W^*_{1,3}$	W_{17}	W_{18}
$T_{2,8,8}$							.		.
$T_{2,7,9}$							.		. ×
$T_{2,7,8}$						. ×	■ ×		+ ×
$T_{2,7,7}$						■ ×	■ ×	.	■ ×
$T_{2,6,10}$				×			.		.
$T_{2,6,9}$				×		.	■ ×	.	■ ×
$T_{2,6,8}$		×	×	×	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,6,7}$		×	×	. ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,6,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,11}$							. ×		.
$T_{2,5,10}$				■ ×		.	■ ×	×	■ ×
$T_{2,5,9}$		×	■ ×	■ ×	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,8}$	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,12}$							.		.
$T_{2,4,11}$						.+	■ ×		+
$T_{2,4,10}$			.	■ ×		■ ×	■ ×	. ×	■ ×
$T_{2,4,9}$		. ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,8}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,13}$							.		.+
$T_{2,3,12}$			×	×		.	■ ×	.	□ ×
$T_{2,3,11}$		×	×	. ×	.	■ ×	■ ×	□ ×	■ ×
$T_{2,3,10}$		. ×	□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,9}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,8}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	$S_{1,3}$	$S^{*}_{1,1}$	$S^{*}_{1,2}$	$S^{*}_{1,3}$	S_{16}	S_{17}
S_{17}									■ ×
S_{16}				□			.	■ ×	■ ×
$S^{*}_{1,3}$							■ ×		
$S^{*}_{1,2}$				.		■ ×	■ ×		■ ×
$S^{*}_{1,1}$			.	□	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$S_{1,3}$				■ ×					
$S_{1,2}$			■ ×	■ ×			.		■ ×
$S_{1,1}$		■ ×	■ ×	■ ×		. ×	.+ ×	■ ×	■ ×
$S_{1,0}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
S_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
S_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
W_{17}									
$W^{*}_{1,2}$									
$W^{*}_{1,1}$							■ ×		.
$W_{1,2}$									□
$W_{1,1}$							.		■ ×
$W_{1,0}$				.		■ ×	■ ×		■ ×
W_{13}			.	□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
W_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{17}									
Q_{16}				.			.		■ ×
$Q_{2,3}$									
$Q_{2,2}$				■ ×			.		.
$Q_{2,1}$			■ ×	■ ×			.+	■ ×	■ ×
$Q_{2,0}$		■ ×	■ ×	■ ×		. ×	+ ×	■ ×	■ ×
Q_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{10}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{17}									
$Z_{1,2}$									
$Z_{1,1}$				■ ×			□		■ ×
$Z_{1,0}$			■ ×	■ ×		.	□	.	■ ×
Z_{13}	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$J_{3,1}$									
$J_{3,0}$				.			.		.
E_{14}		×	. ×	■ ×	■	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
E_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×


S1,0 S1,1 S1,2 S1,3 S*1,1 S*1,2 S*1,3 S16 S17
T2,7,8 T2,7,7 T2,6,9 T2,6,8 T2,6,7 T2,6,6 T2,5,10 T2,5,9 T2,5,8 T2,5,7 T2,5,6 T2,5,5 T2,4,11 T2,4,10 T2,4,9 T2,4,8 T2,4,7 T2,4,6 T2,4,5 T2,4,4 T2,3,12 T2,3,11 T2,3,10 T2,3,9 T2,3,8 T2,3,7 T2,3,6


S1,0 S1,1 S1,2 S1,3 S*1,1 S*1,2 S*1,3 S16 S17
T3,7,7 T3,6,8 T3,6,7 T3,6,6 T3,5,9 T3,5,8 T3,5,7 T3,5,6 T3,5,5 T3,4,10 T3,4,9 T3,4,8 T3,4,7 T3,4,6 T3,4,5 T3,4,4 T3,3,11 T3,3,10 T3,3,9 T3,3,8 T3,3,7 T3,3,6 T3,3,5 T3,3,4 T3,3,3

	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	$S_{1,3}$	$S^*_{1,1}$	$S^*_{1,2}$	$S^*_{1,3}$	S_{16}	S_{17}
$T_{3,7,7}$							.		
$T_{3,6,8}$							.		×
$T_{3,6,7}$						×	■ ×		×
$T_{3,6,6}$				.+		■ ×	■ ×		■ ×
$T_{3,5,9}$									.
$T_{3,5,8}$			×	. ×			■ ×	.	■ ×
$T_{3,5,7}$		×	×	□ ×	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,5,6}$		×	×	□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,5,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,10}$				×			×		×
$T_{3,4,9}$				■ ×		×	■ ×		■ ×
$T_{3,4,8}$			■ ×	■ ×		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,7}$		■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,11}$							.		
$T_{3,3,10}$				. ×			■ ×		. ×
$T_{3,3,9}$				■ ×		■ ×	■ ×	.	■ ×
$T_{3,3,8}$		.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,3}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	$S_{1,3}$	$S^*_{1,1}$	$S^*_{1,2}$	$S^*_{1,3}$	S_{16}	S_{17}
$T_{2,7,8}$							.+		
$T_{2,7,7}$							+		
$T_{2,6,9}$									×
$T_{2,6,8}$						×	+ ×		×
$T_{2,6,7}$				.		×	■ ×		. ×
$T_{2,6,6}$				+		■ ×	■ ×	.	■ ×
$T_{2,5,10}$				.+ ×					
$T_{2,5,9}$			×	+ ×			.	.+	□ ×
$T_{2,5,8}$		×	×	□ ×		. ×	■ ×	□ ×	■ ×
$T_{2,5,7}$		×	×	□ ×	□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,6}$	×	×	. ×	□ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,5,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,11}$									
$T_{2,4,10}$			×	+ ×		×	. ×		. ×
$T_{2,4,9}$			×	■ ×		. ×	■ ×	□ ×	■ ×
$T_{2,4,8}$		□ ×	■ ×	■ ×	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,7}$	.	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,12}$							.		×
$T_{2,3,11}$				.		×	■ ×	×	. ×
$T_{2,3,10}$		×	×	□ ×	×	■ ×	■ ×	. ×	■ ×
$T_{2,3,9}$		×	. ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,8}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$U_{1,0}$	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	U_{16}
U_{16}				■ ×
$U_{1,2}$			■ ×	
$U_{1,1}$		■ ×	■ ×	■ ×
$U_{1,0}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
U_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$S^{\#}_{1,2}$				
$S^{\#}_{1,1}$			■ ×	·
$S_{1,2}$				
$S_{1,1}$			·	■ ×
$S_{1,0}$		■ ×	■ ×	■ ×
S_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
S_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$W_{1,0}$			·	·
W_{13}		·+	■ ×	+
W_{12}	·	■ ×	■ ×	■ ×
$Q_{2,1}$				·
$Q_{2,0}$			·	■ ×
Q_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Q_{10}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$Z_{1,0}$			·	·
Z_{13}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
Z_{11}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$J_{3,0}$				
E_{14}		□	■	□ ×
E_{13}	·	■ ×	■ ×	■ ×
E_{12}	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$U_{1,0}$	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	U_{16}
$T_{5,5,6}$				×
$T_{5,5,5}$			·	■ ×
$T_{4,5,7}$				×
$T_{4,5,6}$		×	■ ×	· ×
$T_{4,5,5}$	·	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{4,4,8}$			·	
$T_{4,4,7}$		·	■ ×	■ ×
$T_{4,4,6}$	·	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{4,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{4,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,6,6}$				
$T_{3,5,7}$			·	×
$T_{3,5,6}$		· ×	■ ×	·+ ×
$T_{3,5,5}$	·+	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,9}$			·+	
$T_{3,4,8}$			■ ×	·
$T_{3,4,7}$		■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,9}$			□	·
$T_{3,3,8}$		·	■ ×	·+
$T_{3,3,7}$	·	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{3,3,3}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

	$U_{1,0}$	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	U_{16}
$T_{2,6,6}$			·	·
$T_{2,5,9}$			×	×
$T_{2,5,8}$		×	· ×	×
$T_{2,5,7}$		×	□ ×	· ×
$T_{2,5,6}$	·+	+ ×	■ ×	+ ×
$T_{2,5,5}$	+	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,10}$				
$T_{2,4,9}$		· ×	■ ×	□ ×
$T_{2,4,8}$	·	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,5}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,4,4}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,11}$			×	
$T_{2,3,10}$		×	· ×	· ×
$T_{2,3,9}$	·+ ×	□ ×	■ ×	□ ×
$T_{2,3,8}$	+ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,7}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×
$T_{2,3,6}$	■ ×	■ ×	■ ×	■ ×

Anhang A.5 Liste stetiger Familien

Vorbemerkung:

Die im folgenden benutzten Gleichungen für die bimodularen Singularitäten weichen teilweise von den im Anhang A.1 angegebenen Gleichungen ab. Die Gleichungen für die quasihomogenen Funktionen aus den Klassen $J_{3,0}$, $Z_{1,0}$ und $S_{1,0}$ werden in V.2.1, V.2.2.1 und V.2.5.1 bewiesen. Die Gleichungen für die bimodularen exzeptionellen Funktionen f mit $\mu(f)-\tau(f)=2$ folgen aus den in A.1 angegebenen Gleichungen, wenn man den Satz von Arnold aus I.1.4 und das Lemma aus I.1.4.2 anwendet.
Für die Bestimmung der Kurvensingularitäten berechne man das System der Multiplizitätensequenzen oder wahlweise, nach geeigneten Koordinatenwechseln, das Newtonpolyeder.
Für die Bestimmung der Singularitätenklassen einer Flächensingularität benutze man die Bestimmungstabelle von Arnold [Ar 3], sowie die in IV.3.2 beschriebene Reduktion von Flächen- auf Kurvensingularitäten. In einigen Fällen ist es sinnvoller, das Newtonpolyeder nach Durchführung des von uns angegebenen Koordinatenwechsels zu berechnen.

Vereinfachungen der Gruppierung E

$\underline{J_{3,0}}$: Im folgenden sei $a_o^2 \neq 4$.

$J_{3,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,10}$:
$$x^3+xy^6+a_ox^2y^3+tx^2y^2$$

$J_{3,0} \xrightarrow{\forall} E_{14}$:
$$x^3+xy^6+a_ox^2y^3+ty^8$$

$\underline{E_{18}}$:

$E_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,12}$:
$$x^3+a_oxy^3(y^4-t^2x)+(y^4-t^2x)^2y^2$$

$E_{18} \xrightarrow{\forall} J_{3,1}$:
$$y^{10}+x(x-ty^3)^2+a_oxy^7$$

$\underline{E_{19}}$:

$E_{19} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,13}$:
$x^3+xy^7+a_o y^{11}+\frac{t}{4}(2a_o t+1)^2(y^4-tx)^2y^2-t(a_o t+1)x^2y^3$

$E_{19} \xrightarrow{\forall} J_{3,2}$:
$x^3+xy^7+a_o y^{11}-tx^2y^3$

$E_{19} \xrightarrow{\forall} E_{18}$:
$x^3+xy^7+a_o y^{11}+ty^{10}$

$\underline{E_{20}}$:

$E_{20} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,14}$:
$x^3+y^{11}+3t^2x^2y^3-4txy^7+(t^3y^2+a_o x)(y^4-tx)^2$

$E_{20} \xrightarrow{\forall} J_{3,3}$:
$x^3+y^3(tx-y^4)^2+a_o xy^8$

$E_{20} \xrightarrow{\forall} E_{19}$:
$x^3+y^{11}+a_o xy^8+txy^7$

Vereinfachungen der Gruppierung Z

$\underline{Z_{1,0}}$: Im folgenden sei $a_o^2 \neq 4$.

$Z_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,8}$:
$x^3y+xy^5+a_o x^2y^3+tx^2y^2$

$Z_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{13}$:
$x^3y+xy^5+a_o x^2y^3+tx^3$

$Z_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{13}$:
$x^3y+xy^5+a_o x^2y^3+ty^6$

$\underline{Z_{17}}$:

$Z_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,11}$:
$x^3y-2tx^2(y^3-t^2x)+(y^3-t^2x)^2y^2$

$Z_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,10}$:
$x^3y+y^2(y^3-t^2x)^2+a_oxy^3(y^3-t^2x)$

$Z_{17} \xrightarrow{\forall} E_{14}$:
$x^3y+y^8+a_oxy^6+t^3x^3$

$Z_{17} \xrightarrow{\forall} Z_{1,1}$:
$x^3y+y^8+a_oxy^6+tx^2y^3$

$\underline{Z_{18}}$:

$Z_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,12}$:
$x^3y+xy^6-t^2x^3+ty^2(y^3-tx)^2$

$Z_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,11}$:
$x^3y+xy^6+a_oy^9+\frac{t}{4}(2a_ot+1)^2(y^3-tx)^2y^2-t(a_ot+1)x^2y^3$

$Z_{18} \xrightarrow{\forall} J_{3,1}$:
$x^3y+x(y^3-tx)^2+a_ox^2y^4$

$Z_{18} \xrightarrow{\forall} Z_{1,2}$:
$x^3y+xy^6+a_oy^9+tx^2y^3$

$Z_{18} \xrightarrow{\forall} Z_{17}$:
$x^3y+xy^6+a_oy^9+ty^8$

$\underline{Z_{19}}$:

$Z_{19} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,13}$:
$x^3y+4tx(t^2x^2-y^6)+(y^3-tx)^3+16t^3y^2(y^3-tx)^2$

$Z_{19} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,12}$:
$x^3y+y^9+3t^2x^2y^3-4txy^6+y(t^3y+a_ox)(y^3-tx)^2$

$Z_{19} \xrightarrow{\forall} Z_{1,3}$:
$x^3y+a_oxy^7+(y^3-tx)^2y^3$

$Z_{19} \xrightarrow{\forall} E_{18}$:
$x^3y+a_oxy^7+(y^3-tx)^3$

$Z_{19} \xrightarrow{\forall} Z_{18}$:

$x^3y+y^9+a_oxy^7+txy^6$

Vereinfachungen der Gruppierung Q

<u>$Q_{2,0}$</u> : Im folgenden sei $a_o^2 \neq 4$.

$Q_{2,0} \xrightarrow{\forall} T_{3,3,7}$:

$x^3+yz^2+xy^4+a_ox^2y^2+tx^2y$

$Q_{2,0} \xrightarrow{\forall} E_{12}$:

$x^3+yz^2+xy^4+a_ox^2y^2+t^2z^2-2t\tilde{a}^3y^3z-\frac{1}{\tilde{a}^3}(1-3\tilde{a}^4)txyz$

$\tilde{a}$ sei eine Wurzel des Polynoms $x^4+\frac{4}{3}a_ox^3+2x^2-\frac{1}{3}=0$

$Q_{2,0} \xrightarrow{\forall} Q_{12}$:

$x^3+yz^2+xy^4+a_ox^2y^2+ty^5$

<u>Q_{16}</u> :

$Q_{16} \xrightarrow{\forall} T_{3,3,9}$:

$x^3+yz^2+y(y^3-t^2x)^2+a_oxy^2(y^3-t^2x)$

$Q_{16} \xrightarrow{\forall} E_{14}$:

$x^3+yz^2+y^7+t^2(z-iy^3)^2+a_oxy^2(z-iy^3)$

$Q_{16} \xrightarrow{\forall} Q_{2,1}$:

$x^3+yz^2+y^7+a_oxy^5+tx^2y^2$

<u>Q_{17}</u> :

$Q_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,11}$:

$x^3+yz^2+xy^5+2t^4z^2+3t^2x^2y^2-ty^4z-5t^3xyz$

$Q_{17} \xrightarrow{\forall} T_{3,3,10}$:

$x^3+yz^2+xy^5+a_oy^8+\frac{t^2}{4}(2a_ot^2+1)^2(y^3-t^2x)^2y-t^2(a_ot^2+1)x^2y^2$

$Q_{17} \xrightarrow{\forall} Q_{2,2}$:

$x^3+yz^2+xy^5+a_oy^8+t^2x^2y^2$

$Q_{17} \xrightarrow{\forall} Q_{16}$:

$$x^3+yz^2+xy^5+a_o y^8+t^2 y^7$$

<u>Q_{18}</u> :

$Q_{18} \xrightarrow{\forall} T_{3,3,11}$:

$$x^3+yz^2+y^8+3t^4x^2y^2-4t^2xy^5+(t^6y+a_ox)(y^3-t^2x)^2$$

$Q_{18} \xrightarrow{\forall} J_{3,1}$: [1)]

$$x^3+yz^2+(2t^3z+(3-\frac{a_o}{2}t^4)t^2xy+(1-\frac{a_o}{2}(3-\frac{a_o}{2}t^4)t^4q)y^4)^2+$$

$$a_oqxy^6-\frac{1}{4}a_o^2t^2q^2y^9 \qquad \text{Dabei ist} \quad q(t):=\frac{2}{2-a_ot^4}$$

$Q_{18} \xrightarrow{\forall} Q_{2,3}$:

$$x^3+yz^2+y^8+a_oxy^6+t^4x^2y^2-2t^2xy^5$$

$Q_{18} \xrightarrow{\forall} Q_{17}$:

$$x^3+yz^2+y^8+a_oxy^6+t^2xy^5$$

Vereinfachungen der Gruppierung W

<u>$W_{1,0}$</u> : Im folgenden sei $a_o^2 \neq 4$.

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,9}$:

$$x^4+a_o(tx+y^2)x^2y+(tx+y^2)^2(\frac{1}{4}(4-a_o^2)tx+y^2)$$

$a_o \neq 0,\ t \neq 0\ :\ T_{2,3,9}$; $\qquad a_o=0,\ t \neq 0\ :\ E_{14}$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,8}$:

$$x^4+a_o(tx+y^2)x^2y+(tx+y^2)^2y^2$$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,5,7}$:

$$x^4+(2tx+a_oy^2)x^2y+(tx+y^2)^2y^2$$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,6,6}$:

$$x^2(x+ty)^2+a_o(x+ty)xy^3+y^6$$

1) Mit dem Koordinatenwechsel $x \longmapsto x-t^{-2}y^3$, $\quad y \longmapsto y$

$$z \longmapsto z-\frac{1}{2t}(3-\frac{1}{2}a_ot^4)xy+\frac{1}{2}t^{-3}\{2-\frac{1}{2}a_ot^4[1-(3-\frac{1}{2}a_ot^4)q]\}y^4$$

verschwinden die Koeffizienten von xy^6 und y^9.

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{13}$ $(a_o \neq 0)$:

$x^4+a_o(tx+y^2)x^2y+(tx+y^2)^3$

$W_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{14}$:

Die bei $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,9}$ und bei $W_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{13}$ genannten Familien ergeben für $a_o=0$ folgende Familie:

$x^4+(tx+y^2)^3$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{13}$:

$x^3(x+ty)+a_o x^2y^3+y^6$

$W_{1,0} \xrightarrow{\forall} W_{13}$:

$x^4+a_o x^2y^3+y^6+txy^4$

$\underline{W_{17}}$:

$W_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,11}$:

$x^4+(2tx+y^2)(3tx+y^2)xy-t^2(2tx+y^2)^2(2tx+\frac{3}{4}y^2)$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2,5,9}$:

$x^4+2(tx+\frac{1}{2}y^2)(tx+y^2)xy+t^2(tx+\frac{1}{2}y^2)^2y^2+a_o(tx+\frac{1}{2}y^2)^2y^3$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} T_{2,6,8}$:

$x^2(x+t^2y)^2+xy^5+a_o(x+t^2y)x^2y^2$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} E_{14}$:

$x^4+(tx+y^2)^2xy+t^2(tx+y^2)^3+a_o(tx+y^2)^3y$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} Z_{1,1}$:

$x^4+(tx+y^2)^2xy+a_o(tx+y^2)^3y$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} W_{1,1}$:

$x^2(x^2+ty^3)+xy^5+a_o y^7$

$W_{17} \xrightarrow{\forall} W^{\#}_{1,1}$:

$(x^2+ty^3)^2+xy^5+a_o y^7$

$\underline{W_{18}}$:

$W_{18} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,12}$:

$$x^4-(3-i)t(tx-y^2)^2xy-(tx-y^2)y^5+\tfrac{1}{2}(1-i)t^4(tx-y^2)^2(tx-\tfrac{1}{4}(3-i)y^2)$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2,5,10}$: 1)

$$x^4+(2t^2x^2+4txy^2+y^4)(2tx+y^2)y+t^4(2tx+y^2)^2y^2+$$
$$(a_o^2t^2+a_o)x^2(2tx+y^2)^2+a_ot^2(2tx+y^2)^3y$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2,6,9}$: 2)

$$x^4+(2t^2x^2-y^4)(2tx-y^2)y+t^4(2tx-y^2)^2y^2-ta_o^2(2tx-y^2)^2xy^2+$$
$$(a_o^2t^2+a_o)x^2(2tx-y^2)^2+a_ot^2(2tx-y^2)^3y$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} T_{2,7,7}$:

$$x^2(x+t^3y)^2+y^7+a_o(x+t^3y)xy^4$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} Z_{17}$:

$$x^4+(tx+y^2)^3y+a_o(tx+y^2)^2x^2$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} W_{1,2}$:

$$x^2(x^2+t^2y^3)+2txy^5+y^7+a_ox^2y^4$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} W^{\#}_{1,2}$:

$$(x^2+t^2y^3)^2+y^7+a_ox^2y^4$$

$W_{18} \xrightarrow{\forall} W_{17}$:

$$x^4+txy^5+y^7+a_ox^2y^4$$

1) Der 4-Jet ist: $x^2((1+2a_ot^2)x+2t^3y)^2$

2) Der 5-Jet ist:

$$x^2((1+2a_ot^2)x+2t^3y)^2-2txy^2(2a_ox+ty)((1+2a_ot^2)x+2t^3y)$$

Vereinfachungen der Gruppierung S

$\underline{S_{1,0}}$: Im folgenden sei $a_o(a_o-1)\neq 0$.

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,8}$:

$$(a_o-1)t^2z^2+yz^2+(x^2+(3-2a_o)txy+y^3)z+a_ox^2y^2+tx^3$$

$a_o\neq\frac{3}{4}$, $t\neq 0$: $T_{2,3,8}$; $a_o=\frac{3}{4}$, $t\neq 0$: E_{13}

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{3,3,7}$:

$$yz^2+(x^2+txy+y^3)z+a_ox^2(tx+y^2)$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{3,4,6}$:

$$yz^2+(x^2+txy+y^3)z+a_ox^2y^2$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{3,5,5}$:

$$yz^2+(x^2+txy+y^3)z+a_o(x+ty)xy^2$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12}$ $(a_o\neq\frac{3}{4})$:

$$(-\frac{1}{3}a_ot^2+y)z^2+(x^2+2a_otxy+y^3)z+a_ox^2y^2+\frac{16}{9}a_o^2tx^3$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\exists} E_{13}$:

Die bei $S_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,8}$ und bei $S_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12}$ genannten Familien ergeben für $a_o=\frac{3}{4}$ folgende Familie:

$$(-\frac{1}{4}t^2+y)z^2+(x^2+\frac{3}{2}txy+y^3)z+\frac{3}{4}x^2y^2+tx^3$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{12}$:

$$(\frac{1}{a_o}t^2+y)z^2+(x^2+2txy+y^3)z+a_ox^2y^2$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} W_{12}$:

$$(\frac{1}{a_o}t^2+y)z^2+(x^2+2t^2y^2+y^3)z+a_o(x^2+t^2y^2)y^2$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} Q_{12}$:

$$yz^2+(x^2+y^3)z+a_ox^2y^2+tx^3$$

$S_{1,0} \xrightarrow{\forall} S_{12}$:

$$yz^2+(x^2+y^3)z+a_ox^2y^2+txy^3$$

$\underline{S_{16}}$:

$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,9}$:

$(y-(t^3+3a_o t^4))z^2+(x^2-(3t^2+8a_o t^3)xy+(t+2a_o t^2)y^3)z-$
$2(t+2a_o t^2)x^2y^2+xy^4+a_o y^6$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{2,5,8}$:

$((t^3+a_o t^4)+y)z^2+(x^2+t^2xy+(t+2a_o t^2)y^3)z+xy^4+a_o y^6$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{3,4,8}$:

$yz^2+(x^2+t(tx+y^2)y)z+x(tx+y^2)^2+a_o(tx+y^2)^2y^2$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} T_{3,5,7}$:

$yz^2+x(x+t^2y)z+xy^4+a_o(x+t^2y)x^2y$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} E_{14}$:

$(t^3+y)z^2+(x^2-4t^2xy-2ty^3)z-t^2x^3+tx^2y^2+xy^4+a_o(tx+y^2)^3$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} Z_{13}$:

$(t^3+y)z^2+(x^2+2t^2xy+ty^3)z+tx^2y^2+xy^4+a_o y^6$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} W_{13}$:

$(t^3+y)z^2+x^2z+xy^4+a_o y^6$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} Q_{2,1}$:

$yz^2+x^2z+(tx+y^2)^2x+a_o(tx+y^2)^3$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} S_{1,1}$:

$yz^2+x^2z+tx^2y^2+xy^4+a_o y^6$

$S_{16} \xrightarrow{\forall} S^{\#}_{1,1}$:

$yz^2+(x^2+ty^3)z+xy^4+a_o y^6$

$\underline{S_{17}}$:

$S_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,10}$:

$(t^4+y)z^2+(x^2+2t^2y^3)z-4t(tx-y^2)^2x+y^6$

$S_{17} \xrightarrow{\exists} T_{2,5,9}$:

$(-t^4+y)z^2+(x^2-2t^3xy)z-2txy^4+y^6$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{3,4,9}$:

$$yz^2+(x^2-t^2(tx+y^2)y+a_o(tx+y^2)^2)z+(-2tx+y^2)(tx+y^2)y^2$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{3,5,8}$:

$$yz^2+(x^2+t^2(tx+y^2)y+a_o(tx+y^2)^2)z+(tx+y^2)y^4$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} T_{3,6,6}$:

$$yz^2+x(x+t^3y)z+y^6+a_o(x+t^3y)xy^3$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} Z_{1,1}$:

$$(t^4+y)z^2+(x^2-2t^2(2tx+y^2)y+a_o(tx+y^2)^2)z+(2tx+y^2)^2y^2$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} W_{1,1}$:

$$(t^4+y)z^2+(x^2+2t^2y^3)z+y^6+a_ox^2y^3$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} Q_{16}$:

$$yz^2+(x^2+a_o(tx+y^2)^2)z+(tx+y^2)^3$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} S_{1,2}$:

$$yz^2+x^2z+(tx+y^2)^2y^2+a_ox^2y^3$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} S^{\#}_{1,2}$:

$$yz^2+(x^2+t^2y^3)z+y^6+a_ox^2y^3$$

$S_{17} \xrightarrow{\forall} S_{16}$:

$$yz^2+x^2z+y^6+a_ox^2y^3+txy^4$$

Vereinfachungen der Gruppierung U

$U_{1,0}$: Im folgenden sei $a_o(a_o^2+1) \neq 0$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,3,8}$ und $U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,9}$: 1)

$$x^3+xz^2+(x+a_oz)y^3+a_o^2(1+a_o^2)^2t^3(x+a_oz)^2+2t(x+a_oz)^2y-3(1+a_o^2)txy(x+a_oz)$$

$a_o^2 \neq \frac{1}{3}$, $t \neq 0$: $T_{2,3,8}$; $a_o^2 = \frac{1}{3}$, $t \neq 0$: $T_{2,3,9}$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{2,4,7}$: 2)

$$x^3+xz^2+xy^3+a_oy^3z+a_o(a_o-i)t^3(x-iz)^2-2a_o(a_o-i)t^2(x-iz)y^2-ia_ot(x-iz)^2y+i(a_o+i)txy(x-iz)+a_o(a_o-i)ty^4$$

$a_o \neq \frac{i}{3}$, $t \neq 0$: $T_{2,4,7}$; $a_o = \frac{i}{3}$, $t \neq 0$: Z_{13}

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{3,4,6}$:

$$x^3+xz^2+xy^3+a_oy^3z+tx^2y+a_otxyz$$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} T_{4,4,5}$:

$$x(x+iz)(x-iz+ty)+xy^3+a_oy^3z$$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} E_{12}$: 3)

$$x^3+xz^2+(x+a_oz)y^3+2^{-8}a_o^{-2}(a_o^2+1)^2t^3(Rx+z)^2-\frac{1}{6a_o}t(x+a_oz)(Rx+z)y-\frac{3}{64a_o}(a_o^2+1)^2t^2(Rx+z)y^2+\frac{9}{64}(a_o^2+1)^2ty^4$$

Dabei ist: $R := \frac{1}{8a_o}(27a_o^4+18a_o^2-1)$

$a_o^2 \neq -\frac{1}{9}$, $t \neq 0$: E_{12}; $a_o^2 = -\frac{1}{9}$, $t \neq 0$: Z_{13}

1) Substituiere $z \longmapsto \frac{1}{a_o}(z-x)$

2) Substituiere $z \longmapsto z-ix$

3) Substituiere $z \longmapsto z-Rx$ und beachte:

$1+R^2 = \frac{1}{2^6a_o^2}(9a_o^2+1)^3(a_o^2+1)$ und $1-a_oR = -\frac{9}{8}(3a_o^2-1)(a_o^2+1)$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} Z_{12}$ und $U_{1,0} \xrightarrow{\exists} Z_{13}$: 1)

$$x^3+xz^2+xy^3+a_0y^3z-\frac{1}{8}(a_0+i)^2t^3(x-iz)^2+\frac{1}{4}(a_0+i)^2t^2(x-iz)y^2$$
$$-ia_0t(x-iz)^2y+i(a_0+i)txy(x-iz)-\frac{1}{8}(a_0+i)^2ty^4$$

$a_0 \neq \frac{i}{3}$, $t \neq 0$: Z_{12}; $a_0 = \frac{i}{3}$, $t \neq 0$: Z_{13}

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} Q_{12}$: 2)

$$x^3+xz^2+(x+a_0z)y^3+t(x+a_0z)^2y$$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} S_{12}$: 3)

$$x^3+xz^2+xy^3+a_0y^3z+tx^2y$$

$U_{1,0} \xrightarrow{\forall} U_{12}$: 4)

$$x^3+xz^2+xy^3+a_0y^3z+ty^4$$

$\underline{U_{16}}$:

$U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{2,4,9}$:

$$2ix^2z+xz^2+y^5+8it^5x^2-2\sqrt{3}\,t^2xyz-8t^4xy^2-2it^3y^4$$
$$-(6+2\sqrt{3}\,i)t^2x^2y+(\sqrt{3}-5i)txy^3-\sqrt{3}\,ity^3z$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} T_{4,4,7}$:

$$x^2z+xz^2+y^5+a_0(x+z)^2y^2+t^2xyz+itxy^3-ity^3z$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} T_{5,5,5}$:

$$x^2z+xz^2+y^5+a_0xy^2z+txyz$$

1) Substituiere $z \longmapsto z-ix$.

2) Substituiere $z \longmapsto \frac{1}{a_0}(z-x)$.
Der semiquasihomogene Typ ist dann: (5,3,6;15).

3) Der semiquasihomogene Typ ist (5,3,4;13).

4) Der semiquasihomogene Typ ist (4,3,4;12).

$U_{16} \xrightarrow{\forall} E_{14}$: [1]

$$x^3+z^3+y^5+a_o xy^2z+t^5(x-\frac{1}{t}y^2+a_o t^{-2}yz)^2+3t^2x^2y-4txy^3+a_o tx^2z$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} Z_{13}$:

$$2ix^2z+xz^2+y^5+a_o x^2y^2+\frac{1}{4}t^5x^2+it^2xyz+\frac{1}{2}t^4xy^2+txy^3+ity^3z+\frac{1}{4}t^3y^4$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} W_{12}$:

$$2ix^2z+xz^2+y^5+a_o x^2y^2+tx^2$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} Q_{2,0}$: [2]

$$x^3+xz^2+y(tz+y^2)^2+a_o x^2y^2$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} S_{1,1}$:

$$x^3+xz^2+y(tx+y^2)^2+a_o x^2y^2$$

$U_{16} \xrightarrow{\forall} U_{1,1}$:

$$x^3+xz^2+y^5+a_o x^2y^2+txy^3$$

1) Substituiere $x \longmapsto x+t^{-1}y^2-a_o t^{-2}yz-t^{-4}y^3$. Man erhält ein semiquasihomogenes Polynom vom Typ (12,3,8;24).

2) Substituiere $z \longmapsto \frac{1}{t}(z-y^2)$. Man erhält ein semiquasihomogenes Polynom vom Typ (4,2,5;12) ($a_o^2t^2 \neq 4$).

Anhang A.6 Die Invarianten (s_+,s_-,s_o,q) der Singularitäten mit Modularität höchstens zwei

Tabelle 1

Klasse		(s_+,s_-,s_o)	q	
A_k	$(k\geq 1)$	$(0,k,0)$	$(C_{k+1},(-\frac{k}{k+1}))$	
D_k	$(k\geq 4)$	$(0,k,0)$	u_1	$k\equiv 0(8)$
			$w_{2,2}^{-1}$	$k\equiv 1(8)$
			$w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-1}$	$k\equiv 2(8)$
			$w_{2,2}^{5}$	$k\equiv 3(8)$
			v_1	$k\equiv 4(8)$
			$w_{2,2}^{-5}$	$k\equiv 5(8)$
			$w_{2,1}^{1} \perp w_{2,1}^{1}$	$k\equiv 6(8)$
			$w_{2,2}^{1}$	$k\equiv 7(8)$
E_6		$(0,6,0)$	$w_{3,1}^{-1}$	
E_7		$(0,7,0)$	$w_{2,1}^{1}$	
E_8		$(0,8,0)$	0	
$T_{2,3,6}$		$(0,8,2)$	0	
$T_{2,3,r}$ $(r>6)$		$(1,r+2,1)$	$q_{A_{r-7}}$	$(q_{A_o}=0)$
E_{12}		$(2,10,0)$	0	
E_{13}		$(2,11,0)$	$w_{2,1}^{-1}$	
E_{14}		$(2,12,0)$	$w_{3,1}^{1}$	
$J_{3,i}$	$(i\geq 0)$	$(2,i+14,0)$	$q_{D_{4+i}}$	
E_{18}		$(2,16,0)$	$w_{3,1}^{-1}$	
E_{19}		$(2,17,0)$	$w_{2,1}^{1}$	
E_{20}		$(2,18,0)$	0	

Klasse	(s_+, s_-, s_o)	q
$T_{2,4,4}$	(0,7,2)	$w^{1}_{2,1}$
$T_{2,4,r}$ $(r>4)$	(1,r+3,1)	$w^{1}_{2,1} \perp q_{A_{r-5}}$ $(q_{A_o}=0)$
Z_{11}	(2,9,0)	$w^{1}_{2,1}$
Z_{12}	(2,10,0)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1}$
Z_{13}	(2,11,0)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,1}$
$Z_{1,i}$ $(i\geq 0)$	(2,i+13,0)	$w^{1}_{2,1} \perp q_{D_{i+4}}$
Z_{17}	(2,15,0)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{3,1}$
Z_{18}	(2,16,0)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{2,1}$
Z_{19}	(2,17,0)	$w^{1}_{2,1}$
$T_{3,3,3}$	(0,6,2)	$w^{-1}_{3,1}$
$T_{3,3,r}$ $(r>3)$	(1,r+3,1)	$w^{-1}_{3,1} \perp q_{A_{r-4}}$ $(q_{A_o}=0)$
Q_{10}	(2,8,0)	$w^{-1}_{3,1}$
Q_{11}	(2,9,0)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{2,1}$
Q_{12}	(2,10,0)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{3,1}$
$Q_{2,i}$ $(i\geq 0)$	(2,i+12,0)	$w^{-1}_{3,1} \perp q_{D_{i+4}}$
Q_{16}	(2,14,0)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{3,1}$
Q_{17}	(2,15,0)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{2,1}$
Q_{18}	(2,16,0)	$w^{-1}_{3,1}$
$T_{2,p,r}$ $(4<p\leq r)$	(1,p+r-1,1)	siehe Tabelle 3
W_{12}	(2,10,0)	$w^{-1}_{5,1}$
W_{13}	(2,11,0)	$w^{-5}_{2,3}$
$W_{1,i}$ $(i\geq 0)$	(2,i+13,0)	$w^{1}_{3,1} \perp q_{D_{i+9}}$
$W^{\#}_{1,i}$ $(i>0)$	(2,i+13,0)	$q_{A_{i+11}}$
W_{17}	(2,15,0)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1}$
W_{18}	(2,16,0)	$w^{1}_{7,1}$

Klasse	(s_+,s_-,s_o)	q
$T_{3,p,r}$ $(3<p\leq r)$	(1,p+r,1)	siehe Tabelle 3
S_{11}	(2,9,0)	$w_{2,3}^{5}$
S_{12}	(2,10,0)	$w_{13,1}^{-1}$
$S_{1,i}$ $(i\geq 0)$	(2,i+12,0)	$w_{5,1}^{-1} \perp q_{D_{i+10}}$
$S_{1,i}^{*}$ $(i>0)$	(2,i+12,0)	$w_{2,1}^{-1} \perp q_{\Lambda_{i+9}}$
S_{16}	(2,14,0)	$w_{17,1}^{-1}$
S_{17}	(2,15,0)	$w_{3,1}^{1} \perp w_{2,2}^{5}$
$T_{4,p,r}$ $(4\leq p\leq r)$	(1,p+r+1,1)	siehe Tabelle 3
U_{12}	(2,10,0)	v_2
$U_{1,i}$ $(i\geq 0)$	(2,i+12,0)	$w_{3,1}^{1} \perp q_{A_{i+8}}$
U_{16}	(2,14,0)	$w_{5,1}^{1} \perp w_{5,1}^{-1}$

Tabelle 2

Klasse	q	
A_{p-1}	$w_{p,1}^{1}$	$p\neq 2$ Primzahl
A_1	$w_{2,1}^{-1}$	
A_3	$w_{2,2}^{5}$	
A_5	$w_{2,1}^{1} \perp w_{3,1}^{-1}$	
A_7	$w_{2,3}^{1}$	
A_8	$w_{3,2}^{1}$	
A_9	$w_{2,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1}$	
A_{11}	$w_{2,2}^{-1} \perp w_{3,1}^{1}$	
A_{13}	$w_{2,1}^{1} \perp w_{7,1}^{1}$	
A_{14}	$w_{3,1}^{-1} \perp w_{5,1}^{-1}$	
A_{15}	$w_{2,4}^{1}$	

Klasse	(s_+,s_-,s_o)	q
$T_{3,p,r}$ $(3<p\le r)$	(1,p+r,1)	siehe Tabelle 3
S_{11}	(2,9,0)	$w^{5}_{2,3}$
S_{12}	(2,10,0)	$w^{-1}_{13,1}$
$S_{1,i}$ $(i\ge 0)$	(2,i+12,0)	$w^{-1}_{5,1} \perp q_{D_{i+10}}$
$S^{*}_{1,i}$ $(i>0)$	(2,i+12,0)	$w^{-1}_{2,1} \perp q_{\Lambda_{i+9}}$
S_{16}	(2,14,0)	$w^{-1}_{17,1}$
S_{17}	(2,15,0)	$w^{1}_{3,1} \perp w^{5}_{2,2}$
$T_{4,p,r}$ $(4\le p\le r)$	(1,p+r+1,1)	siehe Tabelle 3
U_{12}	(2,10,0)	v_2
$U_{1,i}$ $(i\ge 0)$	(2,i+12,0)	$w^{1}_{3,1} \perp q_{A_{i+8}}$
U_{16}	(2,14,0)	$w^{1}_{5,1} \perp w^{-1}_{5,1}$

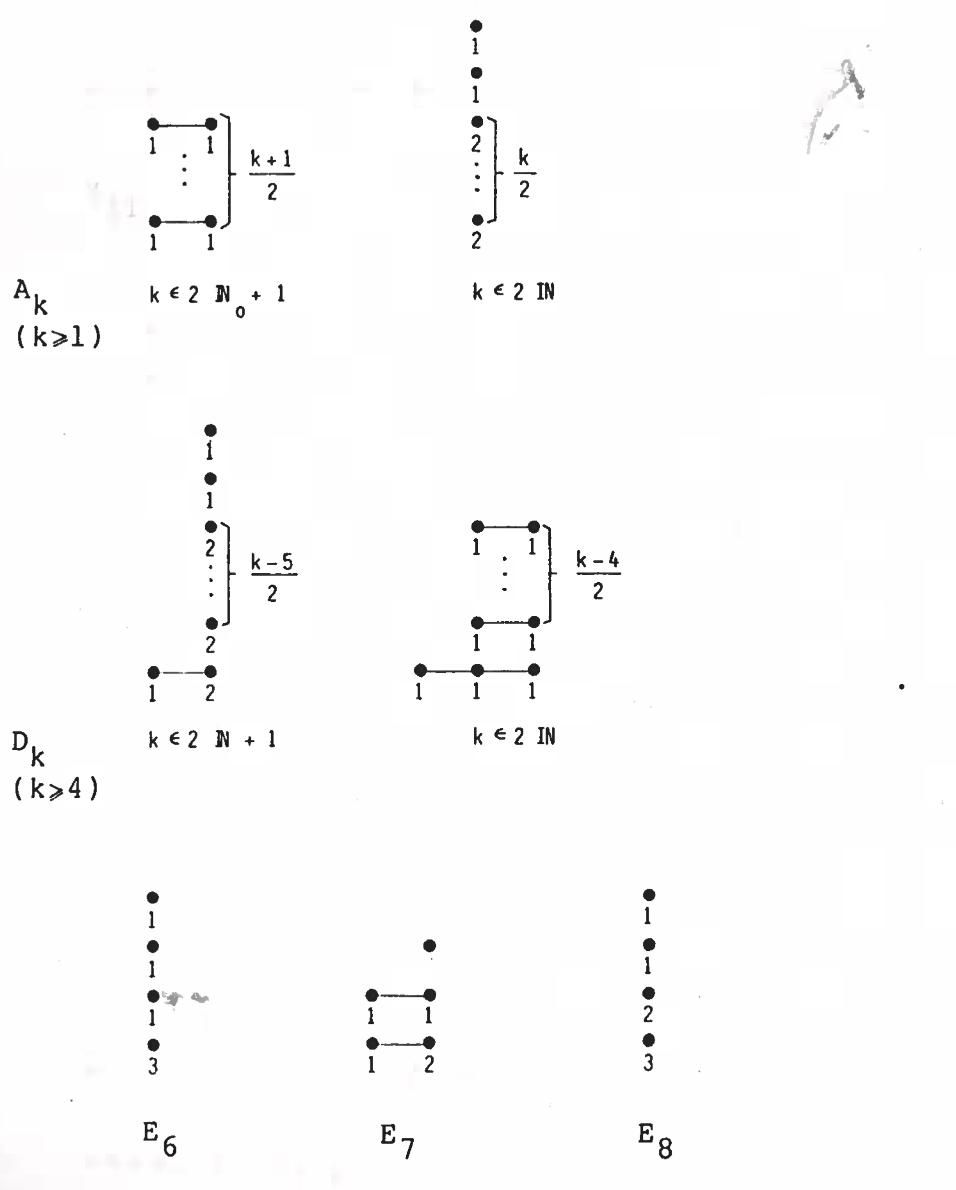
Tabelle 2

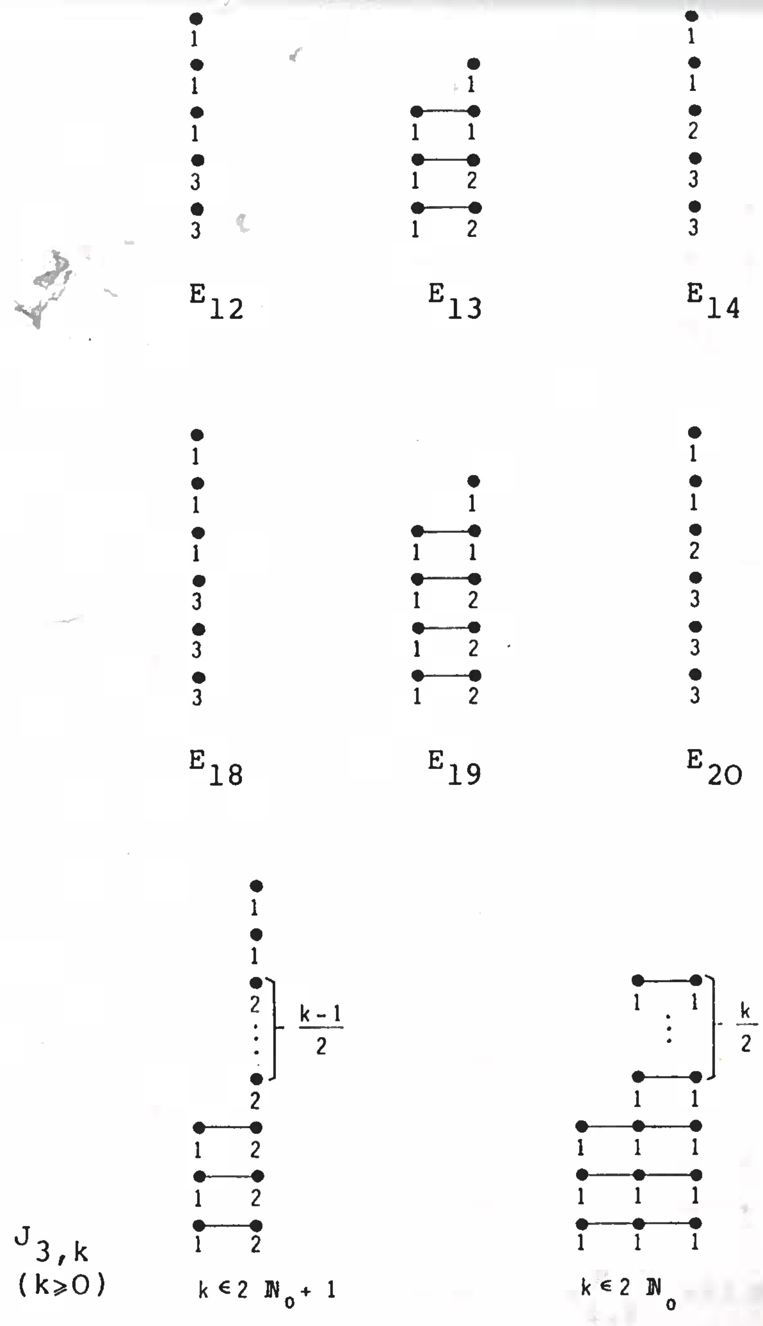
Klasse	q	
A_{p-1}	$w^{1}_{p,1}$	$p\neq 2$ Primzahl
A_1	$w^{-1}_{2,1}$	
A_3	$w^{5}_{2,2}$	
A_5	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{3,1}$	
A_7	$w^{1}_{2,3}$	
A_8	$w^{1}_{3,2}$	
A_9	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{5,1}$	
A_{11}	$w^{-1}_{2,2} \perp w^{1}_{3,1}$	
A_{13}	$w^{1}_{2,1} \perp w^{1}_{7,1}$	
A_{14}	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{5,1}$	
A_{15}	$w^{1}_{2,4}$	

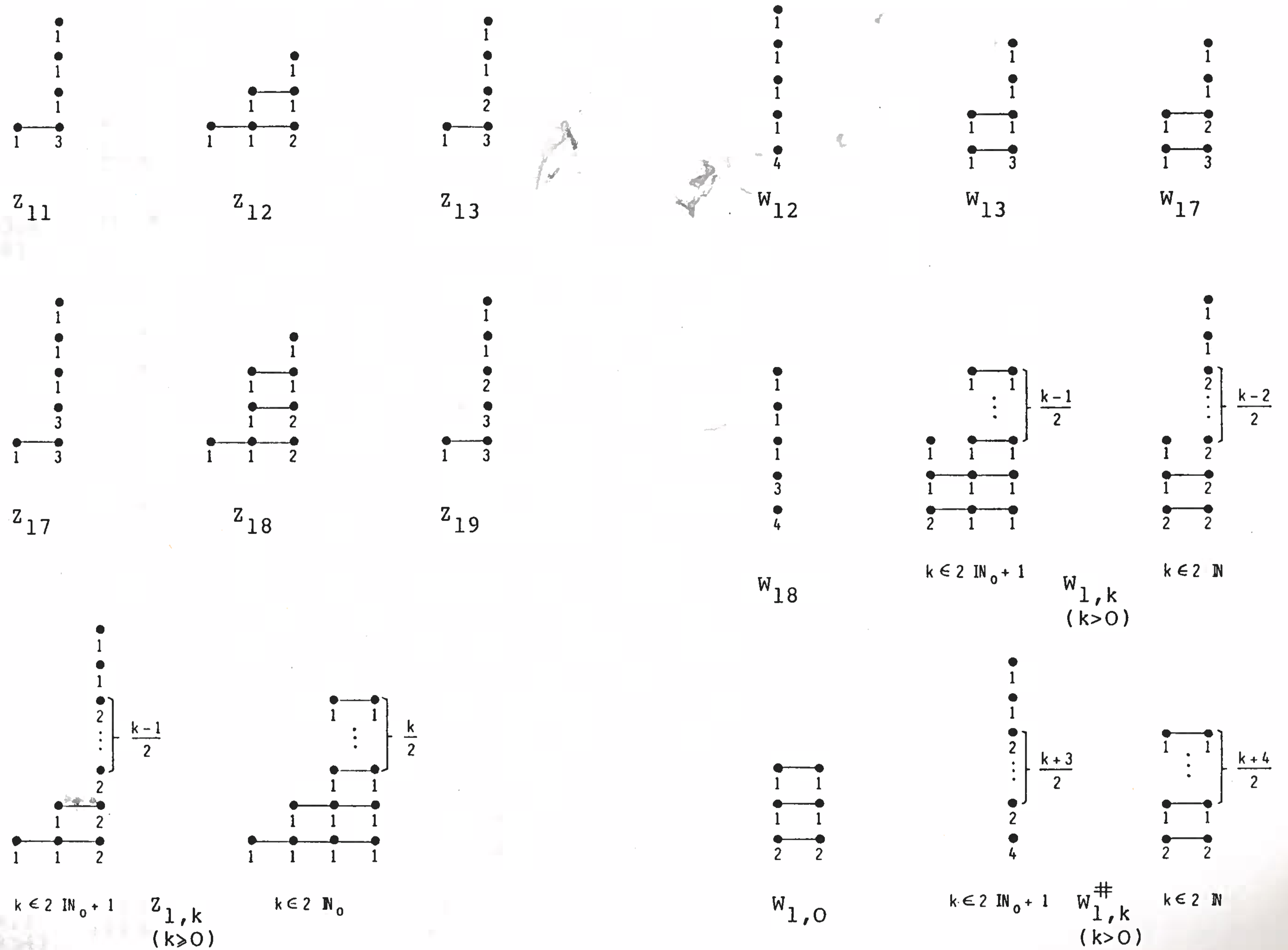
Tabelle 3 Die Diskriminantenformen einiger $T_{i,j,k}$

(i,j,k)	$q_{T_{i,j,k}}$
(2,3,6)	0
(2,3,r) (r>6)	$q_{A_{r-7}}$ $(q_{A_o}=0)$
(2,4,4)	$w^{1}_{2,1}$
(2,4,r) (r>4)	$w^{1}_{2,1} \perp q_{A_{r-5}}$ $(q_{A_o}=0)$
(2,5,5)	$w^{-1}_{5,1}$
(2,5,6)	$w^{-5}_{2,3}$
(2,5,7)	$w^{1}_{11,1}$
(2,5,8)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{7,1}$
(2,5,9)	$w^{-1}_{17,1}$
(2,5,10)	$w^{-5}_{2,2} \perp w^{-1}_{5,1}$
(2,5,11)	$w^{1}_{23,1}$
(2,6,6)	$u_1 \perp w^{1}_{3,1}$
(2,6,7)	$w^{5}_{2,4}$
(2,6,8)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{5,1}$
(2,6,9)	$w^{5}_{2,3} \perp w^{-1}_{3,1}$
(2,6,10)	$u_1 \perp w^{1}_{7,1}$
(2,7,7)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{7,1}$
(2,7,8)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{13,1}$
(2,7,9)	$w^{1}_{31,1}$
(2,8,8)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-5}_{2,4}$
(3,3,3)	$w^{-1}_{3,1}$
(3,3,r) (r>3)	$w^{-1}_{3,1} \perp q_{A_{r-4}}$ $(q_{A_o}=0)$
(3,4,4)	$w^{5}_{2,3}$
(3,4,5)	$w^{-1}_{13,1}$
(3,4,6)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,2}$
(3,4,7)	$w^{-1}_{23,1}$
(3,4,8)	$w^{-1}_{2,2} \perp w^{-1}_{7,1}$
(3,4,9)	$w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{11,1}$
(3,4,10)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{19,1}$
(3,5,5)	$w^{-1}_{2,2} \perp w^{-1}_{5,1}$
(3,5,6)	$w^{1}_{3,3}$
(3,5,7)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{17,1}$
(3,5,8)	$w^{-1}_{41,1}$
(3,5,9)	$w^{5}_{2,4} \perp w^{1}_{3,1}$
(3,6,6)	$w^{5}_{2,2} \perp w^{-1}_{3,1} \perp w^{1}_{3,1}$
(3,6,7)	$w^{1}_{3,2} \perp w^{1}_{5,1}$
(3,6,8)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{3,3}$
(3,7,7)	$w^{5}_{2,3} \perp w^{1}_{7,1}$
(4,4,4)	v_2
(4,4,5)	$w^{1}_{2,3} \perp w^{1}_{3,1}$
(4,4,6)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,4}$
(4,4,7)	$w^{5}_{2,3} \perp w^{1}_{5,1}$
(4,4,8)	$w^{-5}_{2,2} \perp w^{-1}_{2,2} \perp w^{-1}_{3,1}$
(4,4,9)	$w^{1}_{2,3} \perp w^{1}_{7,1}$
(4,5,5)	$w^{-1}_{5,1} \perp w^{-1}_{7,1}$
(4,5,6)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{23,1}$
(4,5,7)	$w^{-1}_{3,1} \perp w^{-1}_{19,1}$
(4,6,6)	$w^{-1}_{2,1} \perp w^{-1}_{2,1} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{-1}_{5,1}$
(5,5,5)	$w^{1}_{2,1} \perp w^{-1}_{5,1} \perp w^{1}_{5,1}$
(5,5,6)	$w^{-1}_{5,1} \perp w^{1}_{13,1}$
(5,5,7)	$w^{-5}_{2,4} \perp w^{-1}_{5,1}$
(5,6,6)	$w^{-5}_{2,2} \perp w^{1}_{3,1} \perp w^{1}_{7,1}$

Anhang A.7 Die Systeme der Multiplizitätensequenzen der 0-, 1-, 2-modularen Kurvensingularitäten

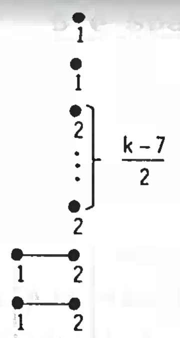




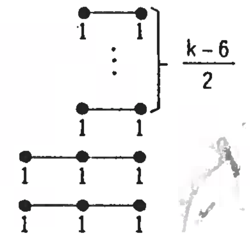


Z_{11}
Z_{12}
Z_{13}
W_{12}
W_{13}
W_{17}
Z_{17}
Z_{18}
Z_{19}
W_{18}
$\frac{k-1}{2}$
$\frac{k-2}{2}$
$k \in 2\,\mathbb{N}_0 + 1$
$W_{1,k}$ $(k>0)$
$k \in 2\,\mathbb{N}$
$\frac{k-1}{2}$
$\frac{k}{2}$
$k \in 2\,\mathbb{N}_0 + 1$
$Z_{1,k}$ $(k \geqslant 0)$
$k \in 2\,\mathbb{N}_0$
$W_{1,0}$
$\frac{k+3}{2}$
$\frac{k+4}{2}$
$k \in 2\,\mathbb{N}_0 + 1$
$W^{\#}_{1,k}$ $(k>0)$
$k \in 2\,\mathbb{N}$

$T_{2,3,k}$
$(k \geqslant 6)$

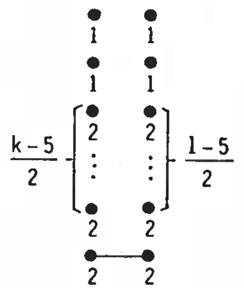


$k \in 2\,\mathbb{N} + 1$

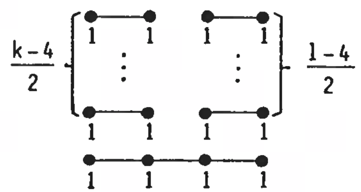


$k \in 2\,\mathbb{N}$

$T_{2,k,l}$
$(l \geqslant k \geqslant 4)$

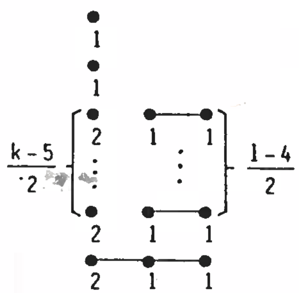


$k \in 2\,\mathbb{N} + 1$
$l \in 2\,\mathbb{N} + 1$

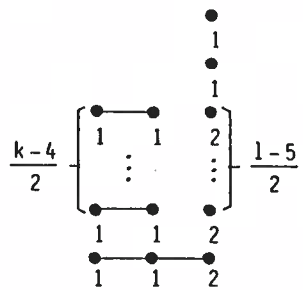


$k \in 2\,\mathbb{N}$
$l \in 2\,\mathbb{N}$

$T_{2,k,l}$
$(l \geqslant k \geqslant 4)$



$k \in 2\,\mathbb{N} + 1$
$l \in 2\,\mathbb{N}$



$k \in 2\,\mathbb{N}$
$l \in 2\,\mathbb{N} + 1$

Anhang A.8 Die Spektren einiger Singularitäten mit Modularität kleiner oder gleich zwei.

(Die Spektren sind außer für Z_{11} der Arbeit von Gorjunov [Go] entnommen. Bezeichnungen wie in I.4.2)

Klasse	μ	N	$\{L_r\}$																			
U16	15	30	26	32	36	36	38	42	42	44	46	48	48	52	54	54	58	64				
U1,6	20	270	240	288	306	324	330	342	360	378	390	396	414	420	432	450	468	480	486	504	522	570
U1,5	19	126	112	135	144	153	154	162	171	180	182	189	196	198	207	216	224	225	234	243	266	
U1,4	18	234	208	252	270	286	288	306	324	338	342	360	364	378	396	414	416	432	450	494		
U1,3	17	108	96	117	126	132	135	144	153	156	162	168	171	180	189	192	198	207	228			
U1,2	16	198	176	216	234	242	252	270	286	288	306	308	324	342	352	360	378	418				
U1,1	15	90	80	99	108	110	117	126	130	135	140	144	153	160	162	171	190					
U1,0	14	162	144	180	198	198	216	234	234	252	252	270	288	288	306	342						
S17	17	24	21	25	28	29	31	32	33	35	36	37	39	40	41	43	44	47	51			
S16	16	34	30	36	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	66	72				
S1,6	20	110	99	115	125	132	135	143	145	154	155	165	165	175	176	185	187	195	198	205	215	231
S1,5	19	100	90	105	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	195	210	
S1,4	18	90	81	95	105	108	115	117	125	126	135	135	144	145	153	155	162	165	175	189		
S1,3	17	80	72	85	95	96	104	105	112	115	120	125	128	135	136	144	145	155	168			
S1,2	15	70	63	75	84	85	91	95	98	105	105	112	115	119	125	126	135	147				
S1,1	15	60	54	65	72	75	78	84	85	90	95	96	102	105	108	115	126					
S1,0	14	50	45	55	60	65	65	70	75	75	80	85	85	90	95	105						
S#1,6	20	160	144	170	180	190	200	208	210	220	230	240	240	250	260	270	272	280	290	300	310	336
S#1,5	19	150	135	160	170	180	190	195	200	210	220	225	230	240	250	255	260	270	280	290	315	
S#1,4	18	140	126	150	160	170	180	182	190	200	210	210	220	230	238	240	250	260	270	294		
S#1,3	17	130	117	140	150	160	169	170	180	190	195	200	210	220	221	230	240	250	273			
S#1,2	16	120	108	130	140	150	156	160	170	180	180	190	200	204	210	220	230	252				
S#1,1	15	110	99	120	130	140	143	150	160	165	170	180	187	190	200	210	231					
W18	13	28	25	29	32	33	36	37	39	40	41	43	44	45	47	48	51	52	55	59		

Klasse	μ	N	$\{L_r\}$																			
W17	17	20	18	21	23	24	26	27	28	29	30	31	32	33	34	36	37	39	42			
W1,5	20	132	121	138	150	154	162	174	176	186	187	198	198	209	210	220	222	234	242	246	258	275
W1,4	19	120	110	126	138	140	150	160	162	170	174	180	186	190	198	200	210	220	222	234	250	
W1,3	18	108	99	114	126	126	138	144	150	153	162	162	171	174	180	186	198	198	210	225		
W1,2	17	96	88	102	112	114	126	128	136	138	144	150	152	160	162	174	176	186	200			
W1,1	15	84	77	90	98	102	112	114	119	126	126	133	138	140	150	154	162	175				
W1,0	15	72	66	78	84	90	95	102	102	108	114	114	120	126	132	138	150					
W#1,5	20	204	187	216	228	240	252	264	276	288	289	300	312	323	324	336	348	360	372	384	396	425
W#1,4	19	192	176	204	216	228	240	252	264	272	276	288	300	304	312	324	336	348	360	372	400	
W#1,3	18	180	165	192	204	216	228	240	252	255	264	276	285	288	300	312	324	336	348	375		
W#1,2	17	168	154	180	192	204	216	228	238	240	252	264	266	276	288	300	312	324	350			
W#1,1	15	156	143	168	180	192	204	216	221	228	240	247	252	264	276	288	300	325				
Q18	18	48	43	49	55	59	61	64	65	67	71	73	77	79	80	83	85	89	95	101		
Q17	17	30	27	31	35	37	39	40	41	43	45	47	49	50	51	53	55	59	63			
Q15	15	42	38	44	50	52	56	56	58	62	64	68	70	70	74	76	82	88				
Q2,6	20	144	132	150	162	174	180	186	192	198	204	210	222	228	234	240	246	252	258	270	282	300
Q2,5	19	132	121	138	150	162	165	174	176	186	187	198	209	210	220	222	231	234	246	258	275	
Q2,4	18	120	110	126	138	150	150	160	162	170	174	186	190	198	200	210	210	222	234	250		
Q2,3	17	108	99	114	126	135	138	144	150	153	162	171	174	180	185	189	198	210	225			
Q2,2	16	96	88	102	114	120	125	128	136	138	150	152	160	162	168	174	186	200				
Q2,1	15	84	77	90	102	105	112	114	119	126	133	138	140	147	150	162	175					
Q2,0	14	72	66	78	90	90	96	102	102	114	114	120	126	126	138	150						
Z19	19	54	49	55	61	65	67	71	73	77	79	81	83	85	89	91	95	97	101	107	113	
Z18	18	34	31	35	39	41	43	45	47	49	51	51	53	55	57	59	61	63	67	71		
Z17	17	24	22	25	28	29	31	32	34	35	36	37	38	40	41	43	44	47	50			
Z1,5	20	168	156	175	189	203	204	217	228	231	245	252	252	259	273	276	287	300	301	315	329	348
Z1,4	19	154	143	161	175	187	189	203	209	217	231	231	231	245	253	259	273	275	287	301	319	

Klasse	μ	N	{Lr}																			
Z1,3	13	140	130	147	161	170	175	189	190	203	210	210	217	230	231	245	250	259	273	290		
Z1,2	17	126	117	133	147	153	161	171	175	189	189	189	203	207	217	225	231	245	261			
Z1,1	15	112	104	119	133	136	147	152	161	168	168	175	184	189	200	203	217	232				
Z1,0	15	98	91	105	119	119	133	133	147	147	147	161	161	175	175	189	203					
E20	20	66	61	67	73	79	83	85	89	91	95	97	101	103	107	109	113	115	119	125	131	137
E19	19	42	39	43	47	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	79	83	87	
E18	18	30	28	31	34	37	38	40	41	43	44	46	47	49	50	52	53	56	59	62		
J3,4	20	234	221	243	261	279	297	299	315	325	333	351	351	369	377	387	403	405	423	441	459	481
J3,3	19	216	204	225	243	261	276	279	297	300	315	324	333	348	351	369	372	387	405	423	444	
J3,2	13	198	187	207	225	243	253	261	275	279	297	297	315	319	333	341	351	369	387	407		
J3,1	17	180	170	189	207	225	230	243	250	261	270	279	290	297	310	315	333	351	370			
J3,0	16	162	153	171	189	207	207	225	225	243	243	261	261	279	279	297	315	333				
U12	12	12	11	14	15	15	17	18	18	19	21	21	22	25								
S12	12	26	24	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	54								
S11	11	16	15	19	20	21	23	24	25	27	28	29	33									
W13	13	16	15	18	19	21	22	23	24	25	26	27	29	30	33							
W12	12	20	19	23	24	27	28	29	31	32	33	36	37	41								
Q12	12	30	28	34	38	40	40	44	46	50	50	52	56	62								
Q11	11	18	17	21	23	24	25	27	29	30	31	33	37									
Q10	10	24	23	29	31	32	35	37	40	41	43	49										
Z13	13	18	17	20	22	23	25	26	27	28	29	31	32	34	37							
Z12	12	22	21	25	27	29	31	33	33	35	37	39	41	45								
Z11	11	30	29	35	37	41	43	45	47	49	53	55	61									
E14	14	24	23	26	29	31	32	34	35	37	38	40	41	43	46	49						
E13	13	30	29	33	37	39	41	43	45	47	49	51	53	57	61							
E12	12	42	41	47	53	55	59	61	65	67	71	73	79	85								

Klasse	μ	N	$\{L_r\}$
A_k $(k \geq 1)$	k	$k+1$	$k+1+j$ $(1 \leq j \leq k)$
D_k $(k \geq 4)$	k	$2k-2$	$3(k-1)$, $2k-1+2j$ $(0 \leq j \leq k-2)$
E_6	6	12	13 16 17 19 20 23
E_7	7	18	19 23 25 27 29 31 35
E_8	8	30	31 37 41 43 47 49 53 59
$T_{p\,q\,r}$	$p+q+r-1$	pqr	pqr, $2pqr$, $(p+j)qr$ $(0<j<p)$, $(q+j)pr$ $(0<j<q)$, $(r+j)pq$ $(0<j<r)$

Anhang B Computerprogramm

Mit dem folgendem Programm kann in vielen Fällen das in IV.3.1.4 beschriebene Verfahren durchgeführt werden.

Als Eingabe benötigt dieses Programm:

1) Eine polynomiale Familie

$$G = \sum_{k,\ell} d_{k\ell} x^k y^\ell$$

in zwei Veränderlichen oder eine polynomiale Familie

$$G' = \sum_{k,\ell,m} t_{k\ell m} x^k y^\ell z^m$$

in drei Veränderlichen von der im Lemma aus IV.3.2.1 beschriebenen Form, das zunächst auf eine Kurvenfamilie G reduziert werden soll.

2) Zwei Matrizen, die gemäß IV.3.1.2 ein System von Multiplizitätensequenzen beschreiben, sowie die Anzahl der Zweige einer Kurve, welche dieses System von Multiplizitäten besitzt.

3) Eine Liste von nichtnumerischen Ausdrücken, von welchen verlangt wird, daß sie nicht verschwinden und auf diese Weise einen der nach Regel 1) in IV.3.1.4 möglichen Fälle festlegen. Das Programm kann sie nicht als solche erkennen und fragt sie gegebenenfalls ab.

Mit diesen Eingaben wird der zugehörige Multiplizitätenbaum berechnet und aus diesem algebraische Bedingungen an die Koeffizienten des Polynoms G hergeleitet. Zur Ausgabe gelangen dann:

Die in IV.3.1.4 beschriebenen algebraischen Bedingungen; und zwar in dreifacher Form:

a) Bedingungen an die Koeffizienten $d_{k\ell}^{(i,\rho)}$

b) dieselben Bedingungen, aber in Termen von $d_{k\ell}^{(i-1,\rho)}$

c) dieselben Bedingungen, aber in Termen von $d_{k\ell}^{(0,\rho)}$ bzw. $t_{k\ell m}$.

Kann G den vorgegebenen Multiplizitätenbaum nicht annehmen oder kann das Programm die gegebene Aufgabenstellung nicht weiterbearbeiten, so erfolgt eine entsprechende Meldung.

Das Programm weicht von einigen Bezeichnungen in IV.3.1.4 ab: Sind ν und μ die in IV.3.1.2 definierten Matrizen, so sei

$NY(i,j) := \nu_{i-1,j}$ für $1 \leq i \leq N_j \leq N$, $1 \leq j \leq j_o$

$MY(i,j) := \mu_{i-1,j}$ für $1 \leq i \leq N_j \leq N$, $1 \leq j \leq j_o - 1$.

Außerdem setzen wir noch:

$NY(N_j + 1, j) = 1$, $NY(N_j + 2, j) = 0$ für $1 \leq j \leq j_o$ und

$MY(N_j + 1, j) = 0$ für $1 \leq j \leq j_o - 1$.

Statt der durch die Zerlegung der Indexmengen I bestimmten Numerierung ρ und κ in $d_{k\ell}^{(i,\rho)}$ und $A_{i,\rho'+\kappa}$ verwenden wir im Programm eine Zweiggebundene Numerierung: Der Zweig der Singularität, der durch die j-te Spalte der Multiplizitätensequenz repräsentiert wird, erhält die feste Nummer j.
Wir schreiben im Programm $D(k,\ell,i,j)$ statt $d_{k\ell}^{(i,\rho)}$ mit $j = \min I_\rho^i$, $A(i,j)$ statt $A_{i,\rho'+\kappa}$ mit $j = \min I_{\rho'+\kappa}^{i+1}$ und j_o statt s (Anzahl der Zweige).

```
//UNM40C   JOB ,BAUER1,TIME=(,3),NOTIFY=UNM40C,TYPRUN=COPY
/*PWD XXXXXXXX
/*JOBPARM LINECT=64,FORMS=0201
// EXEC FORMACX
//FMC.SYSIN DD *
P: PROCEDURE OPTIONS(MAIN);                                /*  2.3.83  */
FORMAC_OPTIONS;
OPEN FILE(SYSPRINT) PAGESIZE(64);
  OPTSET(LINELENGTH=132 ; NOULINE       );
DCL (ZAEHLER,N,NN,NN0,NN1,L1,L2,I,J,JJ,J0,NY(50,50),MULT(50,50),I1,I2,B,
    S(0:49,0:49),DIFF(50),LAUF,K1,K2,JJJ,T(0:49,0:49),NN2,ZAEHL,MIN,KK,
    EX(50,50),II,K,K3)                                          FIXED BIN,
    TERM                                                 CHAR(10000) VAR,
   (AA,BB,L(50),MY(50,49),LABEL,SPALT)                                BIT,
    OUT FILE STREAM;

/*************************************************************************/
/*                                                                      */
/*   DIESES PROGRAMM BERECHNET BESTIMMUNGSGLEICHUNGEN IN  DEN KOEFFI-   */
/*   ZIENTEN DES POLYNOMS G(X,Y) , DIE ERFUELLT SEIN MUESSEN, DAMIT     */
/*   G EINEN VORGEGEBENEN MULTIPLIZITAETENBAUM ANNIMMT.                 */
/*   DAZU MUESSEN FOLGENDE WERTE EINGEGEBEN WERDEN (VGL. IV.3.1.4,      */
/*   3.1.5,3.1.6):                                                      */
/*                                                                      */
/*   G          IST EIN POLYNOM IN DEN VARIABLEN X,Y ODER X,Y,Z (VGL.   */
/*              "SPALT"), (FORMAC-VARIABLE)                             */
/*   VERGL(I)   IST EIN VEKTOR, DESSEN KOMPONENTEN AUSDRUECKE SIND,     */
/*              WELCHE NICHT VERSCHWINDEN SOLLEN. DAS PROGRAMM KANN     */
/*              SIE NICHT ALS SOLCHE ERKENNEN UND FRAGT SIE GGF. AB     */
/*              (FORMAC-VEKTOR, 1 <= I <= 100).                         */
/*   J0         IST DIE ANZAHL DER ZWEIGE DER KURVENSINGULARITAET,      */
/*              DESSEN SYSTEM VON MULTIPLIZITAETENSEQUENZEN GEMAESS     */
/*              IV.3.1.2 BESTIMMT IST DURCH DIE BEIDEN MATRIZEN         */
/*              NY UND MY (1 <= J0 <= 50).                              */
/*   NY(I,J)    DAS MATRIXELEMENT NY(I,J) GIBT DIE MULTIPLIZITAET       */
/*              DES J-TEN ZWEIGES NACH (I-1)-MALIGEM SIGMAPROZESS       */
/*              IM UNENDLICH BENACHBARTEN PUNKT P(I-1,J) AN (PL/1-      */
/*              INTEGER MATRIX; 1 <= I <= NJ <= N <= 50, 1 <= J <= J0). */
/*   MY(I,J)    MY(I,J)='1'B, WENN NACH (I-1)-MALIGEM SIGMAPROZESS      */
/*              DIE BEIDEN ZU P(I-1,J) UNENDLICH BENACHBARTEN PUNKTE    */
/*              P(I,J) UND P(I,J+1) ZUSAMMENFALLEN (MY IST EINE         */
/*              BOULESCHE PL/1-MATRIX; 1 <= I <= NJ <= N <= 50,         */
/*              1 <= J <= J0-1)                                         */
/*   SPALT      SPALT='0'B BEDEUTET, DASS DAS POLYNOM G IN DEN          */
/*              VARIABLEN X,Y VORLIEGT; SPALT='1'B BEDEUTET,DASS G      */
/*              EIN POLYNOM IN DEN VARIABLEN X,Y,Z IST UND DEN          */
/*              VORAUSSETZUNGEN DES LEMMAS IN IV.3.2.1 ENTSPRICHT.      */
/*              G WIRD DANN UEBERFUEHRT IN G:=4A*C-B**2.                */
/*                                                                      */
/*                                                                      */
/*   BEISPIEL FUER DIE CODIERUNG EINER MULTIPLIZITAETENSEQUENZ          */
/*       (T239)                                                         */
/*                                                                      */
/*                  * 0                 NY(7,1)=0       J0=2            */
/*                  * 1                 NY(6,2)=1                       */
/*                  * 1                 NY(5,2)=1                       */
/*          0 *     * 1       NY(4,1)=0 NY(4,2)=1                       */
/*          1 *     * 2       NY(3,1)=1 NY(3,2)=2       MY(3,1)='0'B    */
/*          1 *-----* 2       NY(2,1)=1 NY(2,2)=2       MY(2,1)='1'B    */
/*          1 *-----* 2       NY(1,1)=1 NY(1,2)=2       MY(1,1)='1'B    */
/*                                                                      */
/*   FOLGENDE PUNKTE SIND ZU BEACHTEN (VGL. IV.3.1.6):                  */
/*                                                                      */
/*            - FUER ALLE 1<=J<=J0 MUSS DIE SEQUENZ NY(1,J),.....,      */
/*              NY(NJ,J) MIT NY(NJ,J)=1 UND NY(NJ+1,J)=0 ENDEN,         */
/*              WOBEI NJ+1 DIE "EIGENTLICHE LAENGE" DES J-TEN ZWEIGES   */
/*              IN DER MULTIPLIZITAETENSEQUENZ IST.                     */
/*                                                                      */
/*            - FUER ALLE 1<=J<J0 MUSS DIE SEQUENZ MY(1,J),.....,       */
/*              MY(NJ-1,J) MIT MY(NJ,J)='0'B ENDEN.                     */
/*                                                                      */
/*   BEZEICHNUNGEN IM PROGRAMM:                                         */
/*                               K  L                                   */
/*            - DER KOEFFIZIENT VON  X *Y   DES POLYNOMIALEN            */
/*              REPRAESENTANTEN POL(I,J)(X,Y) DER KURVE IM UNENDLICH    */
/*              BENACHBARTEN PUNKT P(I,J) HEISST D(K,L,I,J).            */
/*              (P(0,1):=(0,0) IST DER SINGULAERE PUNKT DES AUSGANGS-   */
/*              POLYNOMS POL(0,1):=G)
```

```
/*                                                                     */
/*            - A(K+1,N) BEZEICHNET DIE N-TE NULLSTELLE DES TANGEN-    */
/*              TIALKEGELS DIESES POLYNOMS POL(I,J). N GIBT DABEI DIE  */
/*              ZWEIGNUMMER AN, BEI DER P(I+1,N-1) ¬= P(I+1,N), ABER   */
/*              P(I,N-1)=P(I,N) IST (J<=N).                            */
/*                                                                     */
/*            - FUER FESTES I UND J SIND ALLE AUFTRETENDEN A(I+1,N)    */
/*              ALS VONEINANDER VERSCHIEDEN ANZUSEHEN.                 */
/*                                                                     */
/*                                                                     */
/***********************************************************************/

/* BELEGUNG DER EINGANGSVARIABLEN MIT WERTEN (HIER T2,3,14)            */

 LET(G=T000+T100*X+T200*X**2+T210*X**2*Y+T220*X**2*Y**2
    +T010*Y+T020*Y**2+T030*Y**3+T040*Y**4+T050*Y**5+T060*Y**6+T070*
    Y**7+T080*Y**8+T090*Y**9+T110*X*Y+T120*X*Y**2+T130*X*Y**3
    +T140*X*Y**4+T150*X*Y**5+T111*X*Y*Z+T101*X*Z+T011*Y*Z
    +T021*Z*Y**2+T031*Z*Y**3+T041*Z*Y**4+X**3+Y*Z**2+T160*X*Y**6
    +T170*X*Y**7+T002*Z**2+T230*X**2*Y**3+T001*Z);

LET(VERGL(1)=-4*T002;VERGL(2)=-T002*(A(2,2)-A(2,1))*4;
    VERGL(3)=4*T002*(A(2,2)-A(2,1))**2;
    VERGL(4)=-4*T002*(A(2,2)-A(2,1))**2;
    VERGL(5)=4*T002*(A(2,1)-A(2,2))*(A(5,3)-A(5,2));
    VERGL(6)=-4*T002*(A(2,1)-A(2,2))*(A(5,3)-A(5,2));
    VERGL(7)=-4*T002*(A(2,1)-A(2,2))*(A(5,3)-A(5,2));
    VERGL(8)=4*T002*(A(2,1)-A(2,2))*(A(5,3)-A(5,2));
    VERGL(9)=4*T002*(A(2,2)-A(2,1))*(A(6,3)-A(6,2));
    VERGL(10)=-VERGL(9));
J0=3;
NY(1,1)=1; NY(1,2)=1; NY(1,3)=1; NY(1,4)=0; NY(1,5)=0; NY(1,6)=0;
NY(2,1)=1; NY(2,2)=1; NY(2,3)=1; NY(2,4)=0; NY(2,5)=0; NY(2,6)=0;
NY(3,1)=1; NY(3,2)=1; NY(3,3)=1; NY(3,4)=0; NY(3,5)=0; NY(3,6)=0;
NY(4,1)=0; NY(4,2)=1; NY(4,3)=1; NY(4,4)=0; NY(4,5)=0; NY(4,6)=0;
NY(5,1)=0; NY(5,2)=1; NY(5,3)=1; NY(5,4)=0; NY(5,5)=0; NY(5,6)=0;
NY(6,1)=0; NY(6,2)=1; NY(6,3)=1; NY(6,4)=0; NY(6,5)=0; NY(6,6)=0;
NY(7,1)=0; NY(7,2)=1; NY(7,3)=1; NY(7,4)=0; NY(7,5)=0; NY(7,6)=0;
NY(8,1)=0; NY(8,2)=0; NY(8,3)=0; NY(8,4)=0; NY(8,5)=0; NY(8,6)=0;
NY(9,1)=0; NY(9,2)=0; NY(9,3)=0; NY(9,4)=0; NY(9,5)=0; NY(9,6)=0;

MY(1,1)='1'B; MY(1,2)='1'B; MY(1,3)='0'B; MY(1,4)='0'B; MY(1,5)='0'B;
MY(2,1)='1'B; MY(2,2)='1'B; MY(2,3)='0'B; MY(2,4)='0'B; MY(2,5)='0'B;
MY(3,1)='0'B; MY(3,2)='1'B; MY(3,3)='0'B; MY(3,4)='0'B; MY(3,5)='0'B;
MY(4,1)='0'B; MY(4,2)='1'B; MY(4,3)='0'B; MY(4,4)='0'B; MY(4,5)='0'B;
MY(5,1)='0'B; MY(5,2)='1'B; MY(5,3)='0'B; MY(5,4)='0'B; MY(5,5)='0'B;
MY(6,1)='0'B; MY(6,2)='1'B; MY(6,3)='0'B; MY(6,4)='0'B; MY(6,5)='0'B;
MY(7,1)='0'B; MY(7,2)='0'B; MY(7,3)='0'B; MY(7,4)='0'B; MY(7,5)='0'B;
MY(8,1)='0'B; MY(8,2)='0'B; MY(8,3)='0'B; MY(8,4)='0'B; MY(8,5)='0'B;
MY(9,1)='0'B; MY(9,2)='0'B; MY(9,3)='0'B; MY(9,4)='0'B; MY(9,5)='0'B;

SPALT='1'B;

/***********************************************************************/
/***********************************************************************/

IF SPALT THEN DO;
 LET(Q=EXPAND(G));
 LET(U=COEFF(Q,Z**2);
     V=EVAL(COEFF(Q,Z),Z,0);
     W=DIST(Q-U*Z**2-V*Z);
     G=EXPAND(4*U*W-V**2));
 ATOMIZE(U;V;W;Z;Q);
            END;


/*  ORDNEN DES POLYNOMS  */

LET(K1=HIGHPOW(G,X);
    K2=HIGHPOW(G,Y);
    POL(0,1)=0; Q=0);
II=0;
K1=INTEGER(K1);
K2=INTEGER(K2);
DO I=0 TO K1; FIXEDA(I=I);
  DO J=0 TO K2; FIXEDA(J=J);
     LET(W=EVAL(COEFF(G,X**I*Y**J),X,0,Y,0));;
```

```
        IF EQUIV(W;0) THEN LET(D(I,J,0,1)=0;
                                     DD(I,J,0,1)=0;
                                     DDD(I,J,0,1)=0);
                           ELSE DO;
    LET(Q=Q+W*X**I*Y**J;
        DD(I,J,0,1)=W;
        DDD(I,J,0,1)=W);
        II=II+1;
        LET(D(I,J,0,1)=DD(I,J,0,1));
        CHAREX(TERM=D(I,J,0,1));
        PUT FILE(OUT) LIST(TERM);
        ATOMIZE(D(I,J,0,1));
    LET(POL(0,1)=POL(0,1)+D(I,J,0,1)*X**I*Y**J );
                                 END;
  END;
END;
LET(F=Q);
ATOMIZE(Q;W);
PRINT OUT(F);
PUT SKIP(3);

/*  AUFBAU VERSCHIEDENER HILFSFELDER MIT HILFE DER MATRIZEN NY UND      */
/*  MY, SOWIE DES VEKTORS L, DESSEN I-TE KOMPONENTE ANGIBT, OB DER      */
/*  I-TE ZWEIG SCHON ABGEARBEITET IST                                   */

MULT(1,1)=0;
S(0,1)=J0; T(0,1)=J0;
DO I=1 TO J0;
  L(I)='0'B;
  MULT(1,1)=MULT(1,1)+NY(1,I);
END;
DO I=1 TO 100; FIXEDA(I=I);
  IF LOP(VERGL(I))=46 THEN DO; JJJ=I;
                                FIXEDA(JJJ=JJJ);
                                GOTO AA4;
                             END;
END;
AA4:
N=0;
AA1:
/*  BEGINN DES N-TEN AUFBLASPROZESSES                                   */

N=N+1; FIXEDA(N=N);
MY(N,J0)='0'B;
S(N-1,0)=0;
ZAEHLER=0;

I=0;
JJ=0;
AA12:
IF L(JJ+1) THEN NY(N+1,JJ+1)=1;
MULT(N+1,JJ+1)=NY(N+1,JJ+1);
EX(N,JJ+1)=NY(N,JJ+1);
I=I+1;
S(N,I)=1;
AA3:
J=JJ+S(N,I);
IF J>=J0 THEN GOTO AA13;
IF MY(N+1,J) THEN DO; MULT(N+1,JJ+1)=MULT(N+1,JJ+1)+NY(N+1,J+1);
                       EX(N,JJ+1)=EX(N,JJ+1)+NY(N,J+1);
                       S(N,I)=S(N,I)+1;
                       GOTO AA3;
                    END;
             ELSE DO; MY(N+2,J)='0'B;
                       T(N,JJ+1)=S(N,I);
                       JJ=JJ+S(N,I);
                       GOTO AA12;
                    END;
AA13:
T(N,JJ+1)=S(N,I);
NN=1;
LAUF=-1;
AA2:
LAUF=LAUF+1;
NNO=S(N-1,LAUF);
NN=NN+NNO; FIXEDA(NN=NN);
```

```
IF AA & BB THEN IF NN1>1 THEN DO;
  LET(K3=LOWPOW(TK,X);
      K4=LOWPOW(TK,Y));
  I=INTEGER(K3);
  J=INTEGER(K4);
  IF I <= J THEN MIN=I;
           ELSE MIN=J;
  IF MIN > 1 THEN DO;
     PUT EDIT('DAS POLYNOM "G" KANN DEN TOPOLOGISCHEN TYP DES VORGEGE',
              'BENEN MULTIPLIZITAETENBAUMES NICHT ANNEHMEN (MARKE A)')
              (A(54),A(53))SKIP(2);
     EXIT;
                    END;

  I=NN;
  ZAEHL=0;
  AA23:
  IF MIN=EX(N,I) THEN DO; ZAEHL=ZAEHL+1;
                          DIFF(ZAEHL)=I;
                      END;
  I=I+T(N,I);
  IF I < NN+T(N-1,NN) THEN GOTO AA23;
  IF ZAEHL = 0 THEN DO;
     PUT EDIT('DAS POLYNOM "G" KANN DEN TOPOLOGISCHEN TYP DES VORGEGE',
              'BENEN MULTIPLIZITAETENBAUMES NICHT ANNEHMEN (MARKE B)')
              (A(54),A(53))SKIP(2);
     EXIT;
                    END;
                ELSE IF ZAEHL > 1 THEN DO;
/*  ANALYSE, OB EINDEUTIGE ZUORDNUNG ZWISCHEN FAKTOR DES TANGENTIAL- */
/*  KEGELS UND ZWEIG DES MULTIPLIZITAETENBAUMES MOEGLICH IST        */
  DO J=1 TO ZAEHL-1;
    DO K=J+1 TO ZAEHL;
      IF T(N,DIFF(J))-T(N,DIFF(K)) ¬=0 THEN GOTO AA20;
      DO L1=N TO 49 UNTIL (ZAEHL=T(N,DIFF(J)));
        ZAEHL=0;
        DO L2=DIFF(J) TO DIFF(J)+T(N,DIFF(J))-1;
          K3=DIFF(K)-DIFF(J)+L2;
          IF L2=DIFF(J)+T(N,DIFF(J))-1 THEN GOTO AA22;
          IF ¬MY(L1,L2) THEN MY(L1+1,L2)='0'B;
          IF ¬MY(L1,K3) THEN MY(L1+1,K3)='0'B;
          IF MY(L1,L2) & ¬MY(L1,K3) | ¬MY(L1,L2) & MY(L1,K3) THEN
          GOTO AA20;
          AA22:
          IF NY(L1,L2)=0 THEN DO; NY(L1+1,L2)=0;
                                  ZAEHL=ZAEHL+1;
                              END;
          IF NY(L1,K3)=0 THEN NY(L1+1,K3)=0;
          IF NY(L1,L2)-NY(L1,K3) ¬=0 THEN GOTO AA20;
        END;
      END;
    END;
  END;
  GOTO AA21;
  AA20:
  PUT EDIT('DAS PROGRAMM KANN DIE AUFGABENSTELLUNG NICHT WEITER BEARB',
           'EITEN, DA KEINE EINDEUTIGE ZUORDNUNG ZWISCHEN EINEM FAKTO',
           'R DES TANGENTIALKEGELS UND EINEM ZWEIG DER MULTIPLIZITAET',
           'ENSEQUENZ IN DER ',N,'-TEN STUFE UND IM ',NN,'-TEN ZWEIG ',
           'MOEGLICH IST (MARKE C)')
          ((3)(A(57)),A(17),F(2),A(18),F(2),A(11),A(22));

  EXIT;
                                           END;
  AA21:
  KK=DIFF(1);
  LABEL='1'B;
  FIXEDA(MIN=MIN);
  LET(S=DD(NN1-MIN,MIN,N-1,NN);
      T=DD(MIN,NN1-MIN,N-1,NN));
  GOTO AA5;
                             END;
                         ELSE DO;
     PUT EDIT('DAS POLYNOM "G" KANN DEN TOPOLOGISCHEN TYP DES VORGEGE',
              'BENEN MULTIPLIZITAETENBAUMES NICHT ANNEHMEN (MARKE D)')
             (A(54),A(53))SKIP(2);
  EXIT;
                              END;
```

```
IF AA & ¬BB | ¬AA & BB THEN DO;
                   PUT EDIT('FOLGENDER TERM DARF NICHT VERSCHWINDEN:')
                   (A(39))SKIP(3);
  IF AA THEN DO;
                   PRINT_OUT(TERM=T);
                   LET(VERGL(JJJ)=T);
                   B=1;
                END;
            ELSE DO;
                   PRINT_OUT(TERM=S);
                   LET(VERGL(JJJ)=S);
                   B=0;
                END;
  PUT EDIT('SOLLTE DER FALL EINTRETEN, DASS DIESER TERM DOCH VERSCHWI',
           'NDEN MUSS, SO MUSS DIE GLEICHUNG "TERM=0" NACH EINER VARI',
           'ABLEN AUFGELOEST WERDEN UND IN DAS URSPRUENGLICHE POLYNOM',
           ' "G" EINGESETZT WERDEN. DAS PROGRAMM MUSS DANN ERNEUT GES',
           'TARTET WER- ','DEN') ((4) (A(57)),A(12),A(3))SKIP(3);
  JJJ=JJJ+1; FIXEDA(JJJ=JJJ);
  GOTO AA9;
                            END;
                        ELSE;
PUT EDIT(' EINER DER FOLGENDEN AUSDRUECKE S,T DARF NICHT VERSCHWINDE',
        'N. ALSO: S ODER T IN VERGL(.) EINSETZEN')
       (A(58),A(39)) SKIP(2);
PRINT_OUT(S);
PRINT_OUT(T); PUT SKIP(3);
EXIT;
AA8:
IF L1<=L2 THEN B=0;
          ELSE B=1;
AA9:

IF L(NN) THEN DO; ZAEHLER=ZAEHLER+1;
                  GOTO AA2;
              END;
       ELSE IF NY(N,NN)=1 THEN IF ¬MY(N,NN) THEN DO;
                                            ZAEHLER=ZAEHLER+1;
                                            L(NN)='1'B;
                                            GOTO AA2;
                                          END;

LET(F=DIST(POL(N-1,NN)-TK));
PUT EDIT(('*' DO I=1 TO 72)) ((72) (A(1)))SKIP(3);
PUT EDIT(N,' -TER AUFBLASPROZESS FUER DEN ',NN,'-TEN ZWEIG')
        (F(2),A(30),F(2),A(10)) SKIP(2);
PUT EDIT(('*' DO I=1 TO 72)) ((72) (A(1)))SKIP(2);
PUT SKIP(2);

IF B=0 THEN
  DO;
  LET(TKK=S*Y**MIN);
  L1=NN;
  L2=NN+T(N,NN)-1;
  AA14:
  FIXEDA(L1=L1);
  IF L1>=NN+T(N-1,NN) THEN GOTO AA15;
  IF LABEL THEN IF L1=KK THEN GOTO AA16;
  FIXEDA(K1=EX(N,L1));
  LET(TKK=TKK*(X-A(N,L1)*Y)**K1);
  AA16:
  L1=L2+1;
  L2=L2+T(N,L1);
  GOTO AA14;
  AA15:
  LET(TKK=EXPAND(TKK);
      TTK=DIST(TK-TKK));
  DO I=0 TO NN1; FIXEDA(I=I);
    LET(TK=COEFF(TTK,X**(NN1-I)*Y**I));
    IF ¬EQUIV(TK;0) THEN DO;   LET(O=TK);
                         LET(Z=COEFF(TKK,X**(NN1-I)*Y**I);
                             TK=DIST(DD(NN1-I,I,N-1,NN)-Z));
                         LET(TS=DIST(DDD(NN1-I,I,N-1,NN)-Z));
                         IF ¬EQUIV(TK;0) THEN DO;
                             PUT SKIP(2);
                             PRINT_OUT(O);
                             PRINT_OUT(O=TS);
                             PRINT_OUT(O=TK);
                             PUT SKIP(2);
                                           END;
```

```
/*  BEGINN DES N-TEN AUFBLASPROZESSES FUER DEN NN-TEN ZWEIG          */

IF NN>J0 THEN GOTO AA6;
IF L(NN) THEN DO; ZAEHLER=ZAEHLER+1;
                  GOTO AA2;
              END;
NN1=MULT(N,NN); FIXEDA(NN1=NN1);
DO I=0 TO NN1-1; FIXEDA(I=I);
  DO J=0 TO I; FIXEDA (J=J);
     LET(Z=DD(I-J,J,N-1,NN));
     IF LOP(Z)=46 THEN
        LET(DD(I-J,J,N-1,NN)=0 ;DDD(I-J,J,N-1,NN)=0);
                   ELSE IF ¬EQUIV(Z;0) THEN DO;
        LET(POL(N-1,NN)=DIST(POL(N-1,NN)-X**(I-J)*Y**J*D(I-J,J,N-1,NN)));
        PRINT_OUT(O=D(I-J,J,N-1,NN));
        PRINT_OUT(O=DDD(I-J,J,N-1,NN));
        PRINT_OUT(O=Z);
        PUT SKIP(3);
                                                  END;
  END;
END;
LET(K1=HIGHPOW(POL(N-1,NN),X)); L1=INTEGER(K1);
LET(K2=HIGHPOW(POL(N-1,NN),Y)); L2=INTEGER(K2);
DO I=0 TO L1; FIXEDA(I=I);
  DO J=0 TO L2; FIXEDA(J=J);
     IF LOP(DD(I,J,N-1,NN))=46 THEN LET(DD(I,J,N-1,NN)=0 ;
                                        DDD(I,J,N-1,NN)=0);
  END;
END;
LET(TK=0);
DO I=0 TO NN1; FIXEDA(I=I);
  IF ¬EQUIV(DD(I,NN1-I,N-1,NN);0) THEN
     LET(TK=TK+D(I,NN1-I,N-1,NN)*X**I*Y**(NN1-I));
END;

MIN=0; FIXEDA(MIN=MIN);
LABEL='0'B;
DO I=0 TO NN1; FIXEDA(I=I);
  IF LOP(DD(I,NN1-I,N-1,NN))=46 THEN LET(DD(I,NN1-I,N-1,NN)=0 ;
                                           DDD(I,NN1-I,N-1,NN)=0);
END;
LET(S=DD(NN1,0,N-1,NN);
    T=DD(0,NN1,N-1,NN));
AA5:
I=LOP(S);
J=LOP(T);
AA=I>=32 & I<=43 & I ¬=36;
BB=J>=32 & J<=43 & J ¬=36;
IF AA THEN IF BB THEN GOTO AA8;
                 ELSE DO; B=0;
                         GOTO AA9;
                      END;
      ELSE IF BB THEN DO; B=1;
                         GOTO AA9;
                      END;
DO I=1 TO JJJ; FIXEDA(I=I);
  IF EQUIV(S;VERGL(I)) THEN DO; AA='1'B;
                                GOTO AA10;
                            END;
END;
AA10:
DO I=1 TO JJJ; FIXEDA(I=I);
  IF EQUIV(T;VERGL(I)) THEN DO; BB='1'B;
                                GOTO AA11;
                            END;
END;
AA11:
IF AA THEN IF BB THEN GOTO AA8;
                 ELSE DO; B=0;
                         GOTO AA9;
                      END;
      ELSE IF BB THEN DO; B=1;
                         GOTO AA9;
                      END;
AA=EQUIV(S;0);
BB=EQUIV(T;0);

/*  ANALYSE DES FALLS, IN DEM BEIDE KARTEN BETRACHTET WERDEN MUESSEN.*/
/*  VERGLEICH, OB JEDER KARTE EINDEUTIG EIN ZWEIG DER MULTIPLIZITAE- */
/*  TENSEQUENZ ZUORDBAR IST. FALLS NEIN: ENDE                         */
```

```
                                          END;
    END;
    LET(F=EVAL(F,X,X+ALPHA*Y);
        F=EXPAND(F));
    JJ=NN;
    AA18:
    IF LABEL THEN IF JJ=KK THEN JJ=JJ+T(N,KK);
    AA19:
      FIXEDA(JJ=JJ);
      LET(POL(N,JJ)=0;
            TTK=EXPAND(EVAL(TKK,X,X+A(N,JJ)*Y));
            G=EVAL(F,ALPHA,A(N,JJ));
            G=DIST(G+TTK);
            G=EVAL(G,X,U*V,Y,V);
            G=DIST(G/V**NN1);
            G=EVAL(G,U,X,V,Y);
            K1=HIGHPOW(G,X);
            K2=HIGHPOW(G,Y);
            FF=G);
      K1=INTEGER(K1);
      K2=INTEGER(K2);
      I=NN;
      AA17:
      IF NN¬=1 THEN IF MY(N,I-1) THEN DO; I=I-1;
                                              GOTO AA17;
                                           END;
      FIXEDA(I=I);
      DO L1=0 TO K1+NN1; FIXEDA(L1=L1);
        DO L2=0 TO K2+NN1; FIXEDA(L2=L2);
           LET(G=EVAL(G,D(L1,L2,N-1,I),DD(L1,L2,N-1,I)));
        END;
      END;
      LET(G=EXPAND(G));
   /*PUT SKIP(3);   */
      DO I1=0 TO K1; FIXEDA(I1=I1);
        DO I2=0 TO K2; FIXEDA(I2=I2);
           LET(DD(I1,I2,N,JJ)=EVAL(COEFF(G,X**I1*Y**I2),X,0,Y,0));
           LET(DDD(I1,I2,N,JJ)=EVAL(CCEFF(FF,X**I1*Y**I2),X,0,Y,0));
           IF ¬EQUIV(DD(I1,I2,N,JJ);0) THEN DO;
              LET(POL(N,JJ)=POL(N,JJ)+D(I1,I2,N,JJ)*X**I1*Y**I2);
              LET(D(I1,I2,N,JJ)=DDD(I1,I2,N,JJ));
              CHAREX(TERM=D(I1,I2,N,JJ));
              PUT FILE(OUT) LIST(TERM);
     /*       PRINT_OUT(D(I1,I2,N,JJ)=DD(I1,I2,N,JJ)); PUT SKIP(3);   */
     /*       PRINT_OUT(D(I1,I2,N,JJ)=DDD(I1,I2,N,JJ)); PUT SKIP(3);   */
              ATOMIZE(D(I1,I2,N,JJ));
                                                      END;
        END;
      END;
      PUT SKIP(3);
      ATOMIZE(G;FF);
      IF LABEL & B=1 THEN DO;
                                      ATOMIZE(F);
                                      GOTO AA7;
                                   END;
      JJ=JJ+T(N,JJ);
      IF JJ < NN+T(N-1,NN) THEN GOTO AA18;
                               ELSE IF LABEL THEN
                                    DO;
                                       JJ=KK;
                                       FIXEDA(KK=KK);
                                       LET(A(N,KK)=0);
                                       GOTO AA29;
                                    END;
END;
       ELSE
   DO;
   LET(TKK=T*X**MIN);
   L1=NN;
   L2=NN+T(N,NN)-1;
   AA24:
   FIXEDA(L1=L1);
   IF L1>=NN+T(N-1,NN) THEN GOTO AA25;
   IF LABEL THEN IF L1=KK THEN GOTO AA26;
   FIXEDA(K1=EX(N,L1));
   LET(TKK=TKK*(Y-A(N,L1)*X)**K1);
```

```
AA26:
L1=L2+1;
L2=L2+T(N,L1);
GOTO AA24;
AA25:

LET(TKK=EXPAND(TKK);
    TTK=DIST(TK-TKK));
DO I=0 TO NN1; FIXEDA(I=I);
  LET(TK=COEFF(TTK,X**(NN1-I)*Y**I));
      IF ¬EQUIV(TK;0) THEN DO;   LET(O=TK);
                                 LET(Z=COEFF(TKK,X**(NN1-I)*Y**I);
                                     TK=DIST(DD(NN1-I,I,N-1,NN)-Z));
                                 LET(TS=DIST(DDD(NN1-I,I,N-1,NN)-Z));
                                 IF ¬EQUIV(TK;0) THEN DO;
                                     PUT SKIP(2);
                                     PRINT_OUT(O);
                                     PRINT_OUT(O=TS);
                                     PRINT_OUT(O=TK);
                                     PUT SKIP(2);
                                                      END;
                           END;
END;
LET(F=EVAL(F,Y,Y+ALPHA*X);
    F=EXPAND(F));
JJ=NN;
AA28:
IF LABEL THEN IF JJ=KK THEN JJ=JJ+T(N,KK);
AA29:
  FIXEDA(JJ=JJ);
  LET(POL(N,JJ)=0;
      TTK=EXPAND(EVAL(TKK,Y,Y+A(N,JJ)*X));
      G=EVAL(F,ALPHA,A(N,JJ));
      G=DIST(G+TTK);
      G=EVAL(G,X,U,Y,U*V);
      G=DIST(G/U**NN1);
      G=EVAL(G,U,X,V,Y);
      K1=HIGHPOW(G,X);
      K2=HIGHPOW(G,Y);
      FF=G);
  K1=INTEGER(K1);
  K2=INTEGER(K2);
  I=NN;
  AA27:
  IF NN¬=1 THEN IF MY(N,I-1) THEN DO; I=I-1;
                                         GOTO AA27;
                                       END;
  FIXEDA(I=I);
  DO L1=0 TO K1+NN1; FIXEDA(L1=L1);
    DO L2=0 TO K2+NN1; FIXEDA(L2=L2);
      LET(G=EVAL(G,D(L1,L2,N-1,I),DD(L1,L2,N-1,I)));
    END;
  END;
  LET(G=EXPAND(G));
/*PUT SKIP(3);   */
  DO I1=0 TO K1; FIXEDA(I1=I1);
    DO I2=0 TO K2; FIXEDA(I2=I2);
      LET(DD(I1,I2,N,JJ)=EVAL(COEFF(G,X**I1*Y**I2),X,C,Y,0));
      LET(DDD(I1,I2,N,JJ)=EVAL(CCEFF(FF,X**I1*Y**I2),X,0,Y,0));
      IF ¬EQUIV(DD(I1,I2,N,JJ);0) THEN DO;
        LET(POL(N,JJ)=POL(N,JJ)+D(I1,I2,N,JJ)*X**I1*Y**I2);
        LET(D(I1,I2,N,JJ)=DDD(I1,I2,N,JJ));
        CHAREX(TERM=D(I1,I2,N,JJ));
        PUT FILE(OUT) LIST(TERM);
/*      PRINT_OUT(D(I1,I2,N,JJ)=DD(I1,I2,N,JJ)); PUT SKIP(3);    */
/*      PRINT_OUT(D(I1,I2,N,JJ)=DDD(I1,I2,N,JJ)); PUT SKIP(3);    */
        ATOMIZE(D(I1,I2,N,JJ));
                                             END;
    END;
  END;
  PUT SKIP(3);
  ATOMIZE(G;FF);
  IF LABEL & B=0 THEN DO;
                        ATOMIZE(F);
                        GOTO AA7;
                      END;
  JJ=JJ+T(N,JJ);
```

```
    IF JJ < NN+T(N-1,NN) THEN GOTO AA28;
                         ELSE IF LABEL THEN
                              DO;
                                JJ=KK;
                                FIXEDA(KK=KK);
                                LET(A(N,KK)=0);
                                GOTO AA19;
                              END;
END;

AA7:
ATOMIZE(POL(N-1,NN);G;G1;TTK;TKK;TK;O;Z);
GOTO AA2;
AA6: IF ZAEHLER ¬=J0 THEN GOTO AA1;
PUT SKIP(3);
CLOSE FILE(OUT);
DO I=1 REPEAT I+1;
  ON ENDFILE(OUT) GOTO AA40;
  GET FILE(OUT) LIST(TERM);
  PRINT_OUT("TERM");
END;
AA40:
PUT EDIT('FOLGENDE TERME DUERFEN NICHT VERSCHWINDEN:') (A(42))SKIP(4);
PUT SKIP(2);
DO I=1 TO JJJ-1; FIXEDA(I=I);
  PRINT_OUT(VERGL(I));
END;
END P;
//GO.SYSIN DD *
/*
//GO.OUT DD DSN=UNM40C.HILFSDAT.DATA,UNIT=WORK,
//           VOL=SER=WRK001,SPACE=(TRK,(1,1)),
//           DCB=(RECFM=FB,BLKSIZE=6160,LRECL=80),DISP=(NEW,DELETE)
//
```

LITERATURVERZEICHNIS

[A'C] A'Campo, N.: La fonction zêta d'une monodromie. Comment. Math. Helvetici 50, 233 - 248 (1975).

[Ar 1] Arnold, V.I.: Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weylgroups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Funct. Anal. Appl. 6, 254 - 272 (1972).

[Ar 2] Arnold, V.I.: Normal forms for functions in a neighbourhood of a degenerate critical point. Russ. Math. Surveys 29:2, 10 - 50 (1974).

[Ar 3] Arnold, V.I.: Critical points of smooth functions and their normal forms. Russ. Math. Surveys 30:5,1 - 75 (1975).

[Ar 4] Arnold, V.I.: On some open problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis (papers dedicated to the memory of V. K. Patodi), Bombay 1980.

[B - L] Bröcker, Th., Lander, L.: Differentiable germs and catastrophes. London Math. Society Lecture Note Series 17. Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[Be] Berthélot, P.: Classification topologique universelle des singularités d'après Frédéric Pham. in: Seminaire de géométrie analytique Douady - Verdier, Astérisque 16, S. M. F. (1974).

[Br 1] Brieskorn, E.: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta Math. 2, 103 - 161 (1970).

[Br 2] Brieskorn, E.: Die Hierarchie der 1 - modularen Singularitäten. Manuscripta Math. 27, 183 - 219 (1979).

[Br 3] Brieskorn. E.: Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten. Bonner Math. Schriften 150, Bonn 1983.

[Br 4] Brieskorn, E.: Milnor lattices and dynkin diagrams. Proceedings of Symp. in Pure Math. Vol. 40, part 1 (1983).

[Br 5] Brieskorn, E.: Ebene algebraische Kurven. Birkhäuser, Basel / Boston 1981.

[Da] Damon, J.: Finite determinacy and topological triviality I. Invent. math. 62, 299 - 324 (1980).

[Du 1] Durfee, A.H.: The signature of smoothings of complex surface singularities. Math. Ann. 232, 85 - 98 (1978).

[Du 2] Durfee, A.H.: Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. L'Enseignement Math. 25, 131 - 163 (1979).

[Eb 1] Ebeling, W.: Graphentheoretische Eigenschaften der Dynkindiagramme von Singularitäten. Diplomarbeit, Bonn 1977.

[Eb 2] Ebeling, W.: Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten. Math. Ann. 255, 463 - 498 (1981).

[Eb 3] Ebeling, W.: Milnor lattices and geometric bases of some special singularities. L'Enseignement Math. 31, 129 - 146 (1983).

[Eh] Ehlers, F.: Newtonpolyeder und die Monodromie von Hyperflächensingularitäten. Bonner Math. Schriften 111, Bonn 1978.

[Fi] Fischer, G.: Complex analytic geometry. Springer Lecture Notes in Math. 538. Springer, Berlin - Heidelber - New York 1976.

[Fo] Forster, O.: Lokale analytische Geometrie. Ausarbeitung einer Vorlesung, Math. Institut der Universität Münster.

[Ga 1] Gabrielov, A.M.: Intersection matrices for certain singularities. Funct. Anal. Appl. 7, 182 - 193 (1973).

[Ga 2] Gabrielov, A.M.: Dynkin diagrams for unimodal singularities. Funct. Anal. Appl. 8, 192 - 196 (1974).

[Ga 3] Gabrielov, A.M.: Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities. Funct. Anal. Appl. 8, 94 - 98 (1974).

[Go] Gorjunov, V.V.: Adjoining spectra of certain singularities. Vestnik Mos. Univ., Math. Mech. 1981 / 4, 19 - 22.

[H - N - K] Hirzebruch, F., Neumann,W., Koh,S.: Differentiable manifolds and quadratic forms. Lecture Notes in Pure and Applied Math. 4. Marcel Dekker, New York 1971.

[H - Z] Husein - Zade,S.M.: The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. Russ. Math. Surv. 32, 23 - 69 (1977).

[Hu] Humphreys, J.E.: Linear algebraic groups. Graduate Texts in Math. 21. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1975.

[Ka] Karras, U.: Deformations of cusp singularities. Proceedings of Symp. in Pure Math. 30, part 1 (1977).

[Ko] Kouchnirenko, A.G.: Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor. Invent. math. 32, 1 - 31 (1976).

[K - S] Kas,A., Schlessinger, M.: On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity. Math. Ann. 196, 23 - 29 (1972).

[Lam] Lamotke, K.: Die Homologie isolierter Singualritäten. Math. Zeit. 143, 27 - 44 (1975).

[Lan] Lang, S.: Algebra. Addison - Wesley. Reading / Massachusetts 1965.

[Lau 1] Laufer, H.: Normal two-dimensional singularities. Ann. Math. Studies 71. Princeton University Press, Princeton 1971.

[Lau 2] Laufer, H.: On minimally elliptic singularities. Am. J. Math. 99, 1257-1295 (1977).

[Lau 3] Laufer, H.: Ambient deformations for exceptional sets in two-manifolds. Invent. math. 55, 1-36 (1979).

[Le] Lefschetz, S.: Algebraic geometry. Princeton University Press, New Jersey 1953.

[Lo] Looijenga, E.: The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Invent. math. 23, 105-116 (1974).

[L-R] Lê Dũng Tráng, Ramanujam, C.P.: The Invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Am. Journal of Math. 98:1, 67-78 (1976).

[Ma] Martinet, J.: Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables. In: Singularités d' applications différentiables. Springer Lecture Notes in Math. 535. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[Mi] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61. Princeton University Press, Princeton 1968.

[Ne] Neumann, W.: A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerate complex curves. Trans. Amer. Math. Soc. 268, 299-344 (1981).

[Ni] Nikulin, V.V.: Integral symmmetric bilinear forms and some of their applications. Math. USSR Izv. 14:1, 103- 167, (1980).

[Ph] Pham, F.: Remarque sur l'équisingularité universelle. Preprint Université de Nice 1970.

[S 1] Saito, K.: Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. math.14, 123-142 (1971).

[S 2] Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten. Invent. math. 23, 289-325 (1974).

[Sa] Sauter, T.: Über die Milnorgitter der hyperbolischen Hyperflächensingularitäten. Diplomarbeit, Bonn 1983.

[Se] Serre, J.P.: A course in arithmetic. Springer GTM 7. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[Si 1] Siersma, D.: Classification and deformation of singularities. Thesis, University of Amsterdam, 1974.

[Si 2] Siersma, D.: Periodicities in Arnold's lists of singularities. In: Proceedings of the Nordic Summer School (Oslo 1976) "Real and complex singularities". Sijthoff & Noordhoff 1977.

[Sl] Slodowy, P.: Simple singularities and simple algebraic groups. SLN 815, Springer Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[St 1] Steenbrink, J.H.M.: Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. Proceedings of the Nordic Summer School (Oslo 1976) "Real and complex singularities". Sijthoff & Noordhoff 1977.

[St 2] Steenbrink, J.H.M.: Intersection form for quasi - homogeneous singularities. Compositio Math. 34, 211 - 223 (1977).

[Te 1] Tessier, B.: Déformations à type topologique constant I,II. In: Seminaire de géométrie analytique Douady - Verdier 1971 - 72, Astérisque 16, S.M.F. (1974).

[Te 2] Tessier, B.: The hunting of invariants in the geometry of discriminants. In: Proceedings of the Nordic Summer School (Oslo 1976) "Real and complex singularities". Sijthoff & Noordhoff 1977.

[Tj 1] Tjurina, G.N.: The topological properties of isolated singularities of complex spaces of codimension one. Math. USSR Izv. 2, 557 - 571 (1968).

[Tj 2] Tjurina, G.N.: Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces. Math. USSR Izv. 3, 967 - 999 (1969).

[Va 1] Varchenko, A.N.: Zeta - function of monodromy and Newton's diagram. Invent. math. 37, 253 - 262 (1976).

[Va 2] Varchenko,A.N.: The complex exponent of a singularity does not change along strata μ = const.. Funct. Anal. Appl. 16, No 1, 1 - 9 (1982).

[V - G] Varchenko,A.N., Givental', A.B.: Mapping of periods and intersection form. Funct. Anal. Appl. 16, No 2, 83 - 93 (1982).

[Vo] Vohmann, H.D.: Einige Eigenschaften der kritischen Menge und der Diskriminante verseller Deformationen vollständiger Durchschnitte mit isolierter Singularität. Bonner Math. Schriften 70, Bonn 1974.

[v.d.W] van der Waerden, B.L.: Moderne Algebra. Grundlehren der math. Wissenschaft 33,34. Springer, Berlin 1964.

[Wa] Wall, C.T.C.: Notes on the classification of singularities. erscheint in Proc. Lond. Math. Soc..

[Was] Wassermann, G.: Stability of unfoldings. SLN 393. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1974.

[Wi] Wirthmüller,K.: Universell topologisch triviale Deformationen. Dissertation, Regensburg.

[Za] Zakalyukin: The versality theorem. Funct. Anal. Appl. 7, 110 - 112 (1973).

Die Beiträge der Verfasser im einzelnen

Einleitung: Dieter

Kapitel I

I.1 Dieter;
Beweis des Lemmas in 1.2.3 von Franz

I.2 Franz;
2.5 von Dieter

I.3 Dieter

I.4 sowie Kontrolle der Spektren von Richard;
4.3 von Franz

I.5 Franz

Kapitel II: Dieter;

II.2.2 Franz

II.2.4 Dieter und Franz

Kapitel III: Formulierung der Ergebnisse von Franz;
Satz 7 von Franz;
Computerberechnung der Spektrenvereinfachungen von Richard

Kapitel IV

IV.1.1 Richard

IV.1.2 Dieter und Richard

IV.1.3 Dieter

IV.1.4 - 1.6 Franz

IV.2 Franz

IV.3.1 Richard;
Bemerkung (ii) auf S.200 von Dieter

IV.3.2 Dieter

Kapitel V

In Kapitel V sind alle Rechnungen zu den Gruppierungen

- E, Z, Q von Richard
- W, S von Dieter
- U von Franz

Literaturverzeichnis: Zusammenstellung von Franz

Anhang A: Anfertigung der Tabellen von Richard

Anhang B: Richard