

Beiträge
zur Hierarchie der
bimodularen Singularitäten

Diplomarbeit

von

Dieter Balkenborg
Richard Bauer
Franz-Josef Bilitewski

Bonn 1984

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
I Ergebnisse aus der Theorie isolierter Hyperflächensingularitäten	11
I.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften	12
I.1.1 Jeträume, Rechts- und Kontaktäquivalenz	12
I.1.2 Isolierte Singularitäten	12
I.1.3 Korang, Multiplizität und Tangentialkegel	12
I.1.4 Quasihomogene und r -nichtentartete Funktionskeime	12
I.2 Entfaltungen, Deformationen, transversale Scheiben, μ -Homotopie, μ -Vereinfachung und Modularität	12
I.2.1 Entfaltungen von Funktionskeimen	12
I.2.2 Deformationen komplexer Raumkeime	12
I.2.3 Transversale Scheiben	12
I.2.4 μ -Homotopie und μ -Vereinfachung	12
I.2.5 Modularität	12
I.3 Arnolds Klassifikation der Singularitäten mit Modularität höchstens zwei	12
I.4 Topologische Invarianten und deren Verhalten unter μ -Homotopie	12
I.4.1 Dynkindiagramme	12
I.4.2 Spektren und eine Vermutung von Arnold	12
I.4.3 Auflösung von Singularitäten und deren Invarianten unter μ -Homotopie	12
I.4.3.1 Ebene Kurvensingularitäten	12
I.4.3.2 Zweidimensionale Hyperflächensingularitäten	12
I.5 Arnoldsche Klassen und μ -Homotopie	12
I.5.1 Nachtrag eines Beweises	12
I.5.2 Modularität und μ -Homotopie	12
II Die Problemstellung dieser Arbeit und der Aufbau der Beweise ihrer Hauptergebnisse	13
II.1 Der Vereinfachungsbegriff, bekannte Vereinfachungsergebnisse und die Problemstellung dieser Arbeit	13
II.1.1 Der Vereinfachungsbegriff	13
II.1.2 Ergebnisse über Vereinfachungen zwischen uni- und bimodularen Singularitäten von Karras, Brieskorn und Laufer	13
II.1.3 Die Problemstellung dieser Arbeit	13
II.2 Der Aufbau der Argumentation	13
II.2.1 Eine grobe Strukturierung des Vereinfachungsverhaltens	13
II.2.2 Argumentationen mit der Tjurinazahl	13
II.2.3 Die Untersuchung der topologischen Invarianten und der Spektren	13
II.2.4 Zur Analyse der Gleichungen	13

III	Ergebnisse	14
IV	Methoden	15
IV.1	Primitive Einbettungen von Milnorgittern	16
IV.1.1	Ganzzahlige Gitter und Diskriminantenformen	16
IV.1.2	Die Invarianten (s_+, s_-, s'_0, q) eines Milnorgitters	16
IV.1.3	Existenz und Eindeutigkeit gerader, nicht ausgearteter Gitter mit den Invarianten (s_+, s_-, q)	16
IV.1.4	Obergitter und primitive Einbettungen nicht ausgearteter gerader Gitter	16
IV.1.5	Primitive Einbettungen ausgearteter gerader Gitter	16
IV.1.6	Zur Anwendung	16
IV.2	Die Untersuchung der transversalen Scheibe	16
IV.2.1	Konstruktion verseller Entfaltungen und transversaler Scheiben	16
IV.2.2	\mathbb{C}^* -Aktion	16
IV.2.3	Ein Resultat von Wirthmüller	16
IV.2.4	Unabhängigkeit der Stratifikation von T von der gewählten minimalen transversalen Scheibe	16
IV.2.5	Abschließende Bemerkungen	16
IV.3	Ebene Kurvensingularitäten und Reduktion von Flächen- auf Kurvensingularitäten	16
IV.3.1	Isolierte ebene Kurvensingularitäten	16
IV.3.1.1	Die Standardauflösung	16
IV.3.1.2	Das System der Multiplizitätensequenzen	16
IV.3.1.3	Der Multiplizitätenbaum	16
IV.3.1.4	Ein Verfahren zur Herleitung algebraischer Bedingungen	16
IV.3.2	Reduktion der Untersuchung von Flächensingularitäten auf Kurvensingularitäten	16
V	Rechnungen	17
V.1	Primitive Einbettungen in Milnorgitter der Gruppierungen E, Z, Q, W, S, U	17
V.1.1	Gruppierung E	17
V.1.2	Gruppierung Z	17
V.1.3	Gruppierung Q	17
V.1.4	Gruppierung W	17
V.1.5	Gruppierung S	17
V.1.6	Gruppierung U	17
V.2	Analyse der Gleichungen	17
V.2.1	Untersuchung der Klassen $J_{3,0}, E_{18}, E_{19}, E_{20}$	17
V.2.2	Untersuchung der Klassen $Z_{1,0}, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}$	17
V.2.2.1	Allgemeiner Teil	17
V.2.2.2	Untersuchung $Z \rightarrow E$	17
V.2.2.2.1	Aufstellen der Gleichungen	17
V.2.2.2.2	Analyse der Gleichungen	17
V.2.3	Untersuchung der Klassen $Q_{2,0}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}$	17
V.2.3.1	Allgemeiner Teil	17
V.2.3.2	Untersuchung $Q \rightarrow E$	17

V.2.3.2.1	Aufstellen der Gleichungen	18
V.2.3.2.2	Analyse der Gleichungen	18
V.2.4	Untersuchung der Klassen $W_{1,0}, W_{17}, W_{18}$	18
V.2.4.1	Allgemeiner Teil	18
V.2.4.2	Untersuchung $W \rightarrow E$	18
V.2.4.2.1	Aufstellen der Gleichungen	18
V.2.4.2.2	Analyse der Gleichungen	18
V.2.5	Untersuchung der Klassen $S_{1,0}, S_{16}, S_{17}$	18
V.2.5.1	Allgemeiner Teil	18
V.2.5.2	Untersuchung $S \rightarrow E$	18
V.2.5.2.1	Aufstellen der Gleichungen	18
V.2.5.2.2	Analyse der Gleichungen	18
V.2.5.3	Untersuchung $S \rightarrow Z, W$	18
V.2.5.3.1	Aufstellen der Gleichungen	18
V.2.5.3.2	Analyse der Gleichungen	18
V.2.6	Untersuchung der Klassen $U_{1,0}$ und U_{16}	18
V.2.6.1	Vorbereitung der Analyse der Gleichungen	18
V.2.6.2	Untersuchung $U_{1,0} \rightarrow T_{2,38}/T_{2,39}$	18
V.2.6.2.1	Aufstellen der Gleichungen	18
V.2.6.2.2	Analyse der Gleichungen	18
V.2.6.3	Untersuchung $U \rightarrow Z, W$	18
V.2.6.3.1	Aufstellen der Gleichungen	19
V.2.6.3.2	Analyse der Gleichungen	19
V.2.6.4	Untersuchung nicht $(U_{16} \xrightarrow{\exists} T_{3,38})$	19
V.2.6.5	Zusätzliche Gruppenaktion auf Flächensingularitäten mit \mathbb{C}^* -Aktion	19
ANHANG A		20
A.1	Normalformen	20
A.2	Tabelle der Vereinfachungsergebnisse zu den Theoremen 1 und 2 aus Kapitel III	20
A.3	Vereinfachungsergebnisse von Laufer	20
A.4	Die Relationen $L(Y) \rightarrow L(X), \mathcal{D}_s(Y) \leq_s \mathcal{D}_s(X), \mathcal{D}(Y) \leq \mathcal{D}(X), \text{Spec}(X) \rightarrow \text{Spec}(Y)$	20
A.5	Liste stetiger Familien	20
A.6	Signaturen und Diskriminantenformen	20
A.7	Systeme der Multiplizitätensequenzen	20
A.8	Spektren	20
ANHANG B		21
B.1	Computerprogramm	21
Literaturverzeichnis		22
Die Beiträge der Verfasser im einzelnen		26

Einleitung

Eine Hierarchie innerhalb der isolierten Singularitäten von holomorphen Funktionskeimen wird durch die Vereinfachungsrelation definiert. Wir sagen, daß eine isolierte Singularität $f \in \mathfrak{m}^2(n)$ sich in eine isolierte Singularität $g \in \mathfrak{m}^2(n)$ vereinfacht (deformiert, $f \xrightarrow{\mu} g$), wenn durch eine kleine Störung von f Singularitäten erzeugt werden können, die zu g μ -homotop sind. (Die μ -Homotopie ist eine grobe Äquivalenzrelation im Vergleich zur Rechts- und Kontaktäquivalenz.)

Es ist keine allgemeine Methode bekannt, mit der über die Existenz einer Vereinfachung zwischen zwei beliebig vorgegebenen Singularitäten entschieden werden kann. Alle bisherigen Arbeiten über Vereinfachungen zwischen isolierten Hyperflächensingularitäten beziehen sich auf eingegrenzte Gruppen innerhalb der untersten Stufen der Hierarchie.

Ein gewisses Maß für den Rang einer Singularität in dieser Hierarchie ist ihre Modularität. Die Klassifikation von Arnold (vgl. [Ar3]) erfaßt alle isolierten Singularitäten von Hyperflächen mit Modularität höchstens zwei. Die 0-, die 1- und die 2-modularen Klassen gliedert Arnold jeweils in unendliche Serien und in exzeptionelle Klassen. Dabei ergeben sich sowohl für die unimodularen als auch für die bimodularen Singularitäten jeweils vierzehn exzeptionelle Klassen, die in vielerlei Hinsicht verwandte Züge tragen.

E. Brieskorn hat die Vereinfachungen der Singularitäten aus den vierzehn von Arnold entdeckten exzeptionellen unimodularen Klassen innerhalb der unimodularen Singularitäten untersucht ([Br2]). Er beschreibt, wie sich dieses Vereinfachungsverhalten in rein arithmetischen Eigenschaften ihrer Milnorgitter widerspiegelt ([Br3]).

Ein Teil der Vereinfachungen der Singularitäten aus den exzeptionellen bimodularen Klassen ist durch die Arbeit [Lau3] von H. Laufer bekannt. Wir werden das Vereinfachungsverhalten dieser Klassen in der vorliegenden Arbeit weiter untersuchen. Dabei werden wir uns an den Methoden der Arbeit [Br2] von E. Brieskorn orientieren.

Ein Hauptergebnis unserer Arbeit ist die Bestimmung aller Vereinfachungen der Singularitäten aus den exzeptionellen bimodularen Klassen

$$\begin{array}{lll} E_{18}, E_{19}, E_{20} & W_{17}, W_{18} & U_{16} \\ Z_{17}, Z_{18}, Z_{19} & S_{16}, S_{17} & \\ Q_{16}, Q_{17}, Q_{18} & & \end{array}$$

in die uni- und bimodularen Singularitäten.

Wir zeigen, daß – analog zu dem Vereinfachungsverhalten der 0- und 1-modularen Singularitäten – diese Vereinfachungen nicht von den Repräsentanten der exzeptionellen Klassen abhängen, d. h. wenn eine Singularität aus der Klasse X sich in die Singularitäten einer Klasse Y vereinfacht (wir schreiben dann: $X \xrightarrow{\exists} Y$), so gilt dies für alle Singularitäten aus X (wir schreiben dann: $X \xrightarrow{\forall} Y$). Die gefundenen Vereinfachungen sind in einer Tabelle enthalten, die aufgrund des Umfangs dieser Arbeit sowohl im Anschluß an diese Einleitung als auch im tabellarischen Anhang A reproduziert ist.

Es ist nicht zu erwarten, daß das unterschiedliche Vereinfachungsverhalten der verschiedenen exzeptionellen bimodularen Klassen in einer zum unimodularen Fall vergleichbaren Weise in arithmetische Eigenschaften der Milnorgitter zum Ausdruck kommt. Denn nach W. Ebeling haben zum Beispiel E_{18} und Q_{18} isomorphe Milnorgitter.

Es gibt aber eine stärkere Invariante, nämlich die Menge der ausgezeichneten Dynkin-diagramme zu einer isolierten Hyperflächensingularität, durch die sich die Klassen der 0-, 1- und 2-modularen Singularitäten unterscheiden lassen. Diese Diagramme beschreiben das Schnittverhalten einer durch eine geometrische Konstruktion ausgezeichneten Basis des Milnorgitters.

Bekannt ist: Vereinfacht sich eine Singularität f in eine Singularität g , so läßt sich jedes ausgezeichnete Dynkindiagramm zu g als Teilgraph in ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm zu f einbetten. Daher ist es natürlich zu fragen, wann ein solches Einbettungsverhalten vorliegt und ob dem eine Vereinfachung zwischen Singularitäten entspricht. Allerdings scheint die Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme zu einer Singularität unüberschaubar zu sein, und die Beantwortung dieser Frage ist schon von daher äußerst schwierig. Brieskorn hat aufgrund seiner Untersuchungen für die unimodularen Singularitäten die Vermutung geäußert, daß aus einer solchen Teilgraphbeziehung zwischen zwei Dynkindiagrammen stets eine Vereinfachung folgt ([Br4]). Er konnte diese Vermutung in einer Reihe von Fällen beweisen.

Vergleicht man nun, ohne die Bewertung zu berücksichtigen, das Einbettungsverhalten sehr spezieller, von Gabrielov und Ebeling (vgl. I.4.1) bestimmter ausgezeichneten Dynkindiagramme mit den von uns betrachteten Vereinfachungen der bimodularen exzeptionellen Klassen, so findet man zwar einige Vereinfachungen, denen kein Einbettungsverhalten entspricht; aber umgekehrt gibt es zu jeder Diagrammeinbettung eine Vereinfachung.

Bei der Betrachtung der Einbettungsrelation spezieller Diagramme für andere bimodulare Klassen stießen wir auf Beispiele der folgenden Art:

Es gibt ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm der unimodularen Klasse E_{14} , das sich – auch unter Berücksichtigung der Bewertung, wie uns Ebeling zeigte – zu einem ausgezeichneten Dynkindiagramm der bimodularen Klasse $W_{1,0}$ ergänzen läßt. Andererseits zeigt eine Betrachtung der Tjurinazahlen, daß $W_{1,0} \rightarrow E_{14}$ nicht möglich ist (II.2.2.2).

Diese Beobachtungen waren für uns Anlaß, das Vereinfachungsverhalten der niedrigsten Klassen der bimodularen Serien genauer zu untersuchen, zumal wir erwarteten, daß eine solche Untersuchung, verglichen mit der der bimodularen exzeptionellen Klassen, einfacher ausfallen würde. Diese Erwartung hat sich außer für die Klasse $U_{1,0}$ bestätigt.

Das zweite Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit, das ebenso in der Tabelle im Anschluß an diese Einleitung erfaßt ist, ist die Bestimmung aller Vereinfachungen der Singularitäten aus den Klassen der bimodularen Serien

$$J_{3,0}, Z_{1,0}, Q_{2,0}, W_{1,0}, S_{1,0} \text{ und } U_{1,0}$$

in die uni- und bimodularen Singularitäten. Es finden sich hier genau vier Vereinfachungen, für die gilt:

$$X \xrightarrow{\exists} Y, \text{ aber nicht: } X \xrightarrow{\forall} Y.$$

Es sind dies die Paare:

$$(X, Y) = (W_{1,0}, E_{14}), (S_{1,0}, E_{13}), (U_{1,0}, Z_{13})$$

und

$$(U_{1,0}, T_{2,3,9}).$$

Für die von uns betrachteten speziellen ausgezeichneten Dynkindiagramme gilt auch hier: Für jede Diagrammeinbettung ohne Bewertung existiert eine Vereinfachung der zugehörigen Klassen.

Eine weitere interessante Invariante einer isolierten Hyperflächensingularität ist das Spektrum, ein Tupel rationaler Zahlen, das eng mit den Eigenwerten der Monodromie zusammenhängt und über eine gemischte Hodge-Struktur definiert wird.

Nach einer Vermutung von Arnold ([Ar4]) folgt aus einer Vereinfachung zwischen zwei Singularitäten eine (leicht zu verifizierende) Adjazenbeziehung zwischen den zugehörigen Spektren. Diese Adjazenbeziehung haben wir in einer Reihe von Fällen bestimmt. In allen von uns untersuchten Vereinfachungen konnten wir die Vermutung von Arnold bestätigen, die in jüngster Zeit von J.H.M. Steenbrink bewiesen wurde.

Bei einem Vergleich der Spektrenadjazenzen mit dem Verhalten der speziellen Dynkindiagramme stießen wir auf das folgende Beispiel, von dem wir mit einem Hinweis von W. Ebeling beweisen konnten:

Es existiert ein ausgezeichnetes Dynkindiagramm zu der unimodularen Klasse E_{14} , das mit Bewertung als Teilgraph in einem ausgezeichneten Dynkindiagramm der bimodularen Klasse $S_{1,1}^\sharp$ enthalten ist. Es existiert aber keine Vereinfachung zwischen diesen Klassen. Damit ist die von Brieskorn geäußerte Vermutung widerlegt (vgl. III).

Zu den Methoden:

a) Betrachtung der Invarianten

Fast alle Resultate der Form nicht($X \rightarrow Y$) erhalten wir durch die Untersuchung der Invarianten der Singularitäten. Durch eine Betrachtung einfacher Invarianten wie Korang und Milnorzahl lassen sich die möglichen Fälle von Vereinfachungen bereits wesentlich einschränken. Ein notwendiges Kriterium für eine Vereinfachung ist die primitive Einbettbarkeit der Milnorgitter. Ob zwei Milnorgitter primitiv ineinander einbetten, läßt sich mit Hilfe ihrer Diskriminantenformen entscheiden. Diese Methode werden wir in Anlehnung an die Arbeit [Ni] von V.V. Nikulin darstellen.

Zur Berechnung der Diskriminantenformen benutzen wir die Arbeit [Eb2] von W. Ebeling. Ebeling gibt für die meisten von Arnold klassifizierten Singularitäten Dynkindiagramme sowie Signaturen und Zerlegungen der Milnorgitter an. Aus diesen Invarianten lassen sich die Diskriminantenformen leicht berechnen.

b) Analyse der Gleichungen

Die Fälle, in denen $X \rightarrow Y$ nicht durch eine Betrachtung von Invarianten ausgeschlossen werden kann, sowie Resultate der Form $X \xrightarrow{\exists} Y$, $X \xrightarrow{\forall} Y$ und Resultate der Form $X \xrightarrow{\exists} Y$, aber nicht $X \xrightarrow{\forall} Y$ werden bewiesen, indem wir für geeignete $f \in X$, $g \in Y$ Deformationen $f \rightarrow g$ durch eine Analyse der Gleichungen beweisen. Hierzu genügt es, eine transversale Scheibe

$$T: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathfrak{m}^2(n)$$

mit

$$T(t) = f + \sum_{i=1}^r t_i \psi_i, \quad \psi_1, \dots, \psi_r \text{ erzeugen } \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}\Delta f,$$

an den Rechtsorbit von f zu untersuchen.

Die Untersuchung, für welche Parameter t die Singularitäten $T(t)$ μ -homotop zu g sind, führt auf algebraische Bedingungen an die Parameter $t \in \mathbb{C}^r$. Ist g stabil-äquivalent zu einer Kurvensingularität, so leiten wir die Bedingungen mit Hilfe des Systems der Multiplizitätensequenzen dieser Kurvensingularität her. In den anderen von uns betrachteten Fällen ist g stabil-äquivalent zu einer Flächensingularität mit der Multiplizität drei. Wir können uns dann mit einer Methode von C.T.C. Wall auf die Untersuchung von Kurvensingularitäten reduzieren.

Die Berechnungen expliziter Lösungen der algebraischen Bedingungen führt auf stetige Familien f_t mit $f_0 = f$ und $f_t \sim_\mu g$ für $t \neq 0$. Viele Vereinfachungen $f \rightarrow g$ folgen bereits aus der Angabe solcher stetigen Familien. Für quasihomogenes f läßt sich die Untersuchung wesentlich vereinfachen, wenn man transversale Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion benutzt.

Zur Gliederung:

In Kapitel I haben wir die für unsere Untersuchung grundlegenden Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie isolierter Hyperflächensingularitäten zusammengetragen. Diese sind weitgehend bekannt, wenn sie auch in der Literatur nur verstreut zu finden und in den verschiedenen Arbeiten nicht einheitlich dargestellt sind. Kapitel I ist daher recht ausführlich.

Die Kapitel II und III sind zentral. Hier findet der Leser die Präzisierung der Aufgabenstellung, die Hauptresultate der Arbeit, sowie bekannte Vereinfachungsergebnisse, soweit sie mit unserer Untersuchung in Zusammenhang stehen. Ferner werden der Aufbau der Beweise zu den Hauptresultaten erläutert und allgemeine, kurze Teile der Beweise ausgeführt.

Die Methoden für die Untersuchung der primitiven Einbettungen von Milnorgittern, die Untersuchung der transversalen Scheiben und die Methoden zur Aufstellung der algebraischen Bedingungen werden in Kapitel IV dargestellt.

Kapitel V zerfällt in zwei unabhängige Teile. In V.1 untersuchen wir die primitiven Einbettungen von Milnorgittern, um Vereinfachungen zwischen Singularitäten auszuschließen. In V.2 beweisen wir durch eine Analyse der Gleichungen die Aussagen $f \not\rightarrow g$, die nicht durch eine Betrachtung der Invarianten nachgewiesen werden können, sowie die Aussagen $f \rightarrow g$, die nicht aus den von uns angegebenen stetigen Familien folgen.

Wie aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlich ist, verläuft jede der Untersuchungen in V.2 in drei Stufen: Zunächst werden transversale Scheiben berechnet, sowie die Reduktion auf Kurvensingularitäten ausgeführt (Allgemeiner Teil bzw. Vorbereitung der Analyse der Gleichungen).

Im nächsten Schritt werden für mehrere Singularitätenklassen simultan die algebraischen Bedingungen hergeleitet (Aufstellen der Gleichungen). Schließlich untersuchen wir im letzten Schritt das Lösungsverhalten der so gefundenen Gleichungssysteme (Analyse der Gleichungen).

Die Tabellen zu den Ergebnissen aus Kapitel III und die Tabellen mit den Normalformen und Invarianten der Klassen von Arnold sind in Anhang A zusammengefaßt.

Das in Anhang B angegebene Computerprogramm wurde für die Herleitung der algebraischen Bedingungen in Kapitel V.2 verwendet.

Wir weisen noch auf einige besondere inhaltliche Punkte der Arbeit hin.

- Auf die Klassifikation von Arnold gehen wir in I.3 ein.
- Die Singularitäten einer Arnoldschen Klasse sind μ -homotop. In I.2.4 gehen wir auf μ -Homotopie sowie μ -Vereinfachung und deren Eigenschaften ein. In I.5 zeigen wir, daß verschiedene Arnoldsche Klassen in verschiedenen μ -Homotopieklassen liegen. Wir erörtern die Frage, ob die Modularität längs μ -Homotopieklassen konstant ist.
- In II.4.1 geben wir einen ausführlichen Beweis für die Invarianz der Menge der ausgezeichneten Dynkindiagramme unter μ -Homotopie.
- In IV.1.5 behandeln wir die primitive Einbettbarkeit von geraden Gittern mit eindimensionalem Kern in ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter.
- Auf monomialen transversalen Scheiben quasihomogener Singularitäten ist eine \mathbb{C}^* -Aktion definiert. Wir leiten hieraus in IV.2.2 einige Folgerungen her, die die Analyse der Gleichungen in V.2 wesentlich erleichtern. Wir übertragen ferner zwei Ergebnisse für semiuiverselle Deformationen mit \mathbb{C}^* -Aktion auf transversale Scheiben mit \mathbb{C}^* -Aktion, die einer zusätzlichen Eigenschaft genügen.
- In V.2.6 gehen wir kurz auf eine zusätzliche Gruppenoperation für die quasihomogene Singularität aus U_{16} ein. Ferner geben wir für zwei durch ihr Vereinfachungsverhalten ausgezeichnete Singularitäten aus $U_{1,0}$ andere Gleichungen an, die eine zusätzliche Symmetrie besitzen.
- Zwischen bestimmten Klassen von Flächensingularitäten und bestimmten Klassen von Kurvensingularitäten wird durch die Reduktionsmethode von C.T.C. Wall eine Bijektion definiert. Wir zeigen in Anlehnung an Methoden seiner Arbeit [Wa], daß diese Bijektion die Vereinfachungsrelation respektiert (IV.3.2).

Die Untersuchung der Vereinfachungen in dieser Diplomarbeit ist wie folgt aufgeteilt: Richard hat die Vereinfachungen der Klassen

$$\begin{aligned} &J_{3,0}, E_{18}, E_{19}, E_{20} \\ &Z_{1,0}, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19} \\ &Q_{2,0}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18} \end{aligned}$$

Dieter die Vereinfachungen der Klassen

$$\begin{aligned} &W_{1,0}, W_{17}, W_{18} \\ &S_{1,0}, S_{16}, S_{17} \end{aligned}$$

und Franz die Vereinfachungen der Klassen

$$U_{1,0}, U_{16}$$

untersucht.

Ursprünglich waren dies drei Einzelthemen. Die Themenstellung legte es jedoch nahe, diese Arbeit gemeinsam zu verfassen.

Dazu waren aufgrund der unterschiedlichen Ansätze intensive Diskussionen und Umarbeitungen der Entwürfe erforderlich. Sowohl im Aufbau als auch bei den Methoden

haben wir uns um eine kohärente Form der Darstellung bemüht. Dies gilt insbesondere für Kapitel V.

Wir möchten J. Wahl, K. Wirthmüller, C.G. Gibson, U. Karras und vielen anderen für ihre Gesprächsbereitschaft danken, ebenso dem RHRZ für die Benutzung der Rechenanlage. Franz dankt der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle Förderung.

Unser besonderer Dank gilt Dr. W. Ebeling für die gute Betreuung, Prof. E. Brieskorn für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wichtige Impulse und unseren Eltern für die Unterstützung.

Bonn, den 1. Mai 1984

Die drei B's

	$J_{3,0}$	E_{18}	E_{19}	E_{20}	$Z_{1,0}$	Z_{17}	Z_{18}	Z_{19}	$Q_{2,0}$	Q_{16}	Q_{17}	Q_{18}	$W_{1,0}$	W_{17}	W_{18}	$S_{1,0}$	S_{16}	S_{17}	$U_{1,0}$	U_{16}
U_{16}																				•
$U_{1,0}$																				•
U_{12}																			•	•
S_{16}																		•		
$S_{1,2}^{\#}$																		•		
$S_{1,1}^{\#}$																	•	•		
$S_{1,2}$																		•		
$S_{1,1}$																	•	•		•
$S_{1,0}$																	•	•		•
S_{12}																•	•	•	•	•
S_{11}																•	•	•	•	•
W_{17}															•					
$W_{1,2}^{\#}$															•					
$W_{1,1}^{\#}$														•	•					
$W_{1,2}$															•					
$W_{1,1}$														•	•				•	
$W_{1,0}$														•	•				•	
W_{13}													•	•	•			•	•	
W_{12}													•	•	•	•	•	•		•
Q_{17}												•								
Q_{16}											•	•							•	
$Q_{2,3}$												•								
$Q_{2,2}$											•	•								
$Q_{2,1}$										•	•	•						•	•	
$Q_{2,0}$										•	•	•						•	•	•
Q_{12}									•	•	•	•				•	•	•	•	•
Q_{11}									•	•	•	•				•	•	•	•	•
Q_{10}									•	•	•	•				•	•	•	•	•
Z_{18}								•												
Z_{17}							•	•							•					
$Z_{1,3}$								•												
$Z_{1,2}$								•	•											
$Z_{1,1}$							•	•	•					•	•				•	
$Z_{1,0}$							•	•	•	•				•	•				•	
Z_{13}					•	•	•	•					•	•	•			•	•	Δ
Z_{12}					•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	•
Z_{11}					•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	•
E_{19}				•																
E_{18}			•	•				•												
$J_{3,3}$				•																
$J_{3,2}$			•	•																
$J_{3,1}$		•	•	•			•	•			•									
$J_{3,0}$		•	•	•			•	•			•									
E_{14}	•	•	•	•		•	•	•		•	•	•	Δ	•	•			•		•
E_{13}	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	Δ	•	•	•	•
E_{12}	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

• : $X \overset{\forall}{\rightarrow} Y$
 Δ : $X \overset{\exists}{\rightarrow} Y$, ABER NICHT $X \overset{\forall}{\rightarrow} Y$

Tabelle 1: Die vollständige Liste der Vereinfachungen der bimodularen exceptionellen Singularitätenklassen in die bimodularen und die exceptionellen unimodularen Singularitätenklassen (siehe Theoreme 1 und 2 in Kapitel III).

Ergebnisse vom Typ $X \xrightarrow{\vee} T_{P,Q,R}$:

X	$(P, Q, R) \leq$
U_{16}	(5, 5, 5); (4, 4, 7); (2, 4, 9)
$U_{1,0}$	(4, 4, 5); (3, 4, 6); (2, 4, 7); (2, 3, 8)
S_{17}	(3, 6, 6); (3, 5, 8); (3, 4, 9); (2, 5, 9); (2, 3, 10)
S_{16}	(3, 5, 7); (3, 4, 8); (2, 4, 9); (2, 5, 8)
$S_{1,0}$	(3, 5, 5); (3, 4, 6); (3, 3, 7)
W_{18}	(2, 7, 7); (2, 6, 9); (2, 5, 10)
W_{17}	(2, 6, 8); (2, 5, 9); (2, 3, 11)
$W_{1,0}$	(2, 6, 6); (2, 5, 7); (2, 4, 8)
Q_{18}	(3, 3, 11)
Q_{17}	(3, 3, 10); (2, 3, 11)
Q_{16}	(3, 3, 9)
$Q_{2,0}$	(3, 3, 7)
Z_{19}	(2, 4, 12); (2, 3, 13)
Z_{18}	(2, 4, 11); (2, 3, 12)
Z_{17}	(2, 4, 10); (2, 3, 11)
$Z_{1,0}$	(2, 4, 8)
E_{20}	(2, 3, 14)
E_{19}	(2, 3, 13)
E_{18}	(2, 3, 12)
$J_{3,0}$	(2, 3, 10)

Eine Vereinfachung $X \xrightarrow{\vee} T_{P,Q,R}$ liegt genau dann vor, wenn das Triple (P, Q, R) kleiner oder gleich einem Tripel in der für X aufgeführten Liste ist.

Ergebnis: $U_{1,0} \xrightarrow{\exists} T_{2,3,9}$, ABER NICHT $U_{1,0} \xrightarrow{\vee} T_{2,3,9}$.

Tabelle 2: Die vollständige Liste der Vereinfachungen der bimodularen exzeptionellen Singularitätenklassen in die unimodularen Singularitätenklassen vom Typ $T_{P,Q,R}$ (siehe Theoreme 1 und 2 in Kapitel III).

Literatur

- [AC] N. A'Campo. "La fonction zêta d'une monodromie". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 50 (1975), S. 233–248.
- [Ar 1] V. I. Arnold. "Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities". In: *Functional Analysis and Its Applications* 6 (1972), S. 254–272.
- [Ar 2] V. I. Arnold. "Normal forms for functions in a neighbourhood of a degenerate critical point". In: *Russian Mathematical Surveys* 29.2 (1974), S. 10–50.
- [Ar 3] V. I. Arnold. "Critical points of smooth functions and their normal forms". In: *Russian Mathematical Surveys* 30.5 (1975), S. 1–75.
- [Ar 4] V. I. Arnold. "On some open problems in singularity theory". In: *Geometry and Analysis*. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bombay: Springer Verlag, 1980.
- [Be] P. Berthélot. "Classification topologique universelle des singularités d'après Frédéric Pham". In: *Séminaire de géométrie analytique Douady–Verdier*. Bd. 16. Astérisque. 1974.
- [BL] Th. Bröcker und L. Lander. *Differentiable Germs and Catastrophes*. Bd. 17. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.
- [Br 1] E. Brieskorn. "Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen". In: *Manuscripta Mathematica* 2 (1970), S. 103–161.
- [Br 2] E. Brieskorn. "Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten". In: *Manuscripta Mathematica* 27 (1979), S. 183–219.
- [Br 3] E. Brieskorn. *Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten*. Bd. 150. Bonner Mathematische Schriften. Bonn, 1983.
- [Br 4] E. Brieskorn. "Milnor lattices and Dynkin diagrams". In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Bd. 40. 1983.
- [Br 5] E. Brieskorn. *Ebene algebraische Kurven*. Basel: Birkhäuser, 1981.
- [Da] J. Damon. "Finite determinacy and topological triviality I". In: *Inventiones Mathematicae* 62 (1980), S. 299–324.
- [Du 1] A. H. Durfee. "The signature of smoothings of complex surface singularities". In: *Mathematische Annalen* 232 (1978), S. 85–98.
- [Du 2] A. H. Durfee. "Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points". In: *L'Enseignement Mathématique* 25 (1979), S. 131–163.
- [Eb 1] W. Ebeling. "Graphentheoretische Eigenschaften der Dynkin-Diagramme von Singularitäten". Diplomarbeit. Magisterarb. Bonn, 1977.

- [Eb 2] W. Ebeling. “Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten”. In: *Mathematische Annalen* 255 (1981), S. 463–498.
- [Eb 3] W. Ebeling. “Milnor lattices and geometric bases of some special singularities”. In: *L’Enseignement Mathématique* 31 (1983), S. 129–146.
- [Eh] F. Ehlers. *Newtonpolyeder und die Monodromie von Hyperflächensingularitäten*. Bd. 111. Bonner Mathematische Schriften. Bonn, 1978.
- [Fi] G. Fischer. *Complex analytic geometry*. Bd. 538. Lecture Notes in Mathematics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976.
- [Fo] O. Forster. *Lokale analytische Geometrie*. Lecture notes, Universität Münster.
- [Ga 1] A. M. Gabrielov. “Intersection matrices for certain singularities”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 7 (1973), S. 182–193.
- [Ga 2] A. M. Gabrielov. “Dynkin diagrams for unimodal singularities”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 8 (1974), S. 192–196.
- [Ga 3] A. M. Gabrielov. “Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 8 (1974), S. 94–98.
- [Go] V. V. Gorjunov. “Adjoining spectra of certain singularities”. In: *Vestnik Moskovskogo Universiteta* (1981).
- [HNK] F. Hirzebruch, W. Neumann und S. Koh. *Differentiable manifolds and quadratic forms*. Bd. 4. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1971.
- [Hu] J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Bd. 21. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975.
- [HZ] S. M. Husein-Zade. “The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces”. In: *Russian Mathematical Surveys* 32 (1977), S. 23–69.
- [Ka] U. Karras. “Deformations of cusp singularities”. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Bd. 30. 1977.
- [Ko] A. G. Kouchnirenko. “Polyèdres de Newton et nombres de Milnor”. In: *Inventiones Mathematicae* 32 (1976), S. 1–31.
- [KS] A. Kas und M. Schlessinger. “On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity”. In: *Mathematische Annalen* 196 (1972), S. 23–29.
- [Lam] K. Lamotke. “Die Homologie isolierter Singularitäten”. In: *Mathematische Zeitschrift* 143 (1975), S. 27–44.
- [Lan] S. Lang. *Algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1965.
- [Lau 1] H. Laufer. *Normal two-dimensional singularities*. Bd. 71. Annals of Mathematics Studies. Princeton: Princeton University Press, 1971.
- [Lau 2] H. Laufer. “On minimally elliptic singularities”. In: *American Journal of Mathematics* 99 (1977), S. 1257–1295.
- [Lau 3] H. Laufer. “Ambient deformations for exceptional sets in two-manifolds”. In: *Inventiones Mathematicae* 55 (1979), S. 1–36.
- [Le] S. Lefschetz. *Algebraic geometry*. New Jersey: Princeton University Press, 1953.

- [Lo] E. Looijenga. “The complement of the bifurcation variety of a simple singularity”. In: *Inventiones Mathematicae* 23 (1974), S. 105–116.
- [LR] Lê Dũng Tráng und C. P. Ramanujam. “The invariance of Milnor’s number implies the invariance of the topological type”. In: *American Journal of Mathematics* 98 (1976), S. 67–78.
- [Ma] J. Martinet. “Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables”. In: *Singularités d’applications différentiables*. Bd. 535. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1976.
- [Mi] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Bd. 61. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1968.
- [Ne] W. Neumann. “A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 268 (1981), S. 299–344.
- [Ni] V. V. Nikulin. “Integral symmetric bilinear forms and some of their applications”. In: *Math. USSR Izvestija* 14 (1980), S. 103–167.
- [Ph] F. Pham. *Remarque sur l’équisingularité universelle*. Preprint, Université de Nice. 1970.
- [S 1] K. Saito. “Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen”. In: *Inventiones Mathematicae* 14 (1971), S. 123–142.
- [S 2] K. Saito. “Einfach-elliptische Singularitäten”. In: *Inventiones Mathematicae* 23 (1974), S. 289–325.
- [Sa] T. Sauter. “Über die Milnorgitter der hyperbolischen Hyperflächensingularitäten”. Magisterarb. Bonn, 1983.
- [Se] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Bd. 7. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1973.
- [Si 1] D. Siersma. “Classification and deformation of singularities”. Diss. University of Amsterdam, 1974.
- [Si 2] D. Siersma. “Periodicities in Arnold’s lists of singularities”. In: *Real and complex singularities*. Proceedings of the Nordic Summer School, Oslo 1976. Sijthoff & Noordhoff, 1977.
- [Sl] P. Slodowy. *Simple singularities and simple algebraic groups*. Bd. 815. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.
- [St 1] J. H. M. Steenbrink. “Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology”. In: *Real and complex singularities*. Proceedings of the Nordic Summer School, Oslo 1976. Sijthoff & Noordhoff, 1977.
- [St 2] J. H. M. Steenbrink. “Intersection form for quasi-homogeneous singularities”. In: *Compositio Mathematica* 34 (1977), S. 211–223.
- [Te 1] B. Tessier. “Déformations à type topologique constant I, II, III”. In: *Séminaire de géométrie analytique Douady–Verdier 1971–72*. Bd. 16. Astérisque. Société Mathématique de France, 1974.

- [Te 2] B. Tossier. “The hunting of invariants in the geometry of discriminants”. In: *Real and complex singularities*. Proceedings of the Nordic Summer School, Oslo 1976. Sijthoff & Noordhoff, 1977.
- [Tj 1] G. N. Tjurina. “The topological properties of isolated singularities of complex spaces of codimension one”. In: *Math. USSR Izvestija* 2 (1968), S. 557–571.
- [Tj 2] G. N. Tjurina. “Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces”. In: *Math. USSR Izvestija* 3 (1969), S. 967–999.
- [Va 1] A. N. Varchenko. “Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram”. In: *Inventiones Mathematicae* 37 (1976), S. 253–262.
- [Va 2] A. N. Varchenko. “The complex exponent of a singularity does not change along strata $\mu = \text{const}$ ”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 16.1 (1982), S. 1–9.
- [vdW] B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra*. Bd. 33/34. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1964.
- [VG] A. N. Varchenko und A. B. Givental. “Mapping of periods and intersection form”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 16.2 (1982), S. 83–93.
- [Vo] H. D. Vohmann. *Einige Eigenschaften der kritischen Menge und der Diskriminante verseller Deformationen*. Bd. 70. Bonner Mathematische Schriften. Bonn, 1974.
- [wa] CTC Wall. “Notes on the classification of singularities”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.3 (1984), S. 461–513.
- [Was] G. Wassermann. *Stability of unfoldings*. Bd. 393. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1974.
- [Wi] K. Wirthmüller. “Universell topologisch triviale Deformationen”. Diss. Regensburg, 1978.
- [Za] Zakalukin. “The versality theorem”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 7 (1973), S. 110–112.

Die Beiträge der Verfasser im einzelnen

Einleitung: Dieter

Kapitel I

- I.1 Dieter;
Beweis des Lemmas in 1.2.3 von Franz
- I.2 Franz;
2.5 von Dieter
- I.3 Dieter
- I.4 sowie Kontrolle der Spektren von Richard;
4.3 von Franz
- I.5 Franz

Kapitel II: Dieter;

- II.2.2 Franz
- II.2.4 Dieter und Franz

Kapitel III: Formulierung der Ergebnisse von Franz;
Satz 7 von Franz;
Computerberechnung der Spektrenvereinfachungen von Richard

Kapitel IV

- IV.1.1 Richard
- IV.1.2 Dieter und Richard
- IV.1.3 Dieter
- IV.1.4–1.6 Franz
- IV.2 Franz
- IV.3.1 Richard;
Bemerkung (ii) auf S. 200 von Dieter
- IV.3.2 Dieter

Kapitel V

In Kapitel V sind alle Rechnungen zu den Gruppierungen

- E, Z, Q von Richard
- W, S von Dieter
- U von Franz

Literaturverzeichnis: Zusammenstellung von Franz

Anhang A: Anfertigung der Tabellen von Richard

Anhang B: Richard